

Datum: _____

Registrační číslo uchazeče

--	--	--	--	--	--

Hodnocení

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

Varianta 6

UPOZORNĚNÍ: Není dovoleno používat tabulky ani kalkulačky. U řešení každého příkladu musí být uveden postup.

ZADÁNÍ:

1. Určete, pro která $p \in \mathbf{R}$ je výraz definován, pak výraz zjednodušte:

$$\left[\frac{1-p}{p^2+p} \cdot (1+2p^{-1}+p^{-2}) \right] : (1-p^{-2}) .$$

2. V množině reálných čísel najděte všechna řešení logaritmické nerovnice

$$2 \log(x+1) < \log 2 + \log(3-x) ,$$

kde $\log$ značí dekadický logaritmus.

3. Vyřešte v množině přirozených čísel rovnici: $\binom{n+3}{n+1} - \binom{n-1}{2} = 2(n^2-2)$ a uveďte podmínku, kdy je definována.

4. V podniku plánovali pro splnění zakázky vyrábět denně 400 přístrojů. Protože se však podařilo vyrobit každý den o 50 přístrojů více, ukončili celou zakázku o 3 dny dříve, než plánovali. Kolik přístrojů pro tuto zakázku vyrobili?

5. Napište rovnici přímky p , která je kolmá na přímkou q : $y = 2x + 3$ a prochází středem kružnice $x^2 + 4x + y^2 = -2$.

ŘEŠENÍ:

1. Určete, pro která $p \in \mathbf{R}$ je výraz definován, pak výraz zjednodušte:

$$\left[\frac{1-p}{p^2+p} \cdot (1+2p^{-1}+p^{-2}) \right] : (1-p^{-2}) .$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1-p}{p^2+p} \cdot (1+2p^{-1}+p^{-2}) \right] : (1-p^{-2}) &= \frac{1-p}{p(p+1)} \cdot \left(1 + \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2} \right) : \frac{p^2-1}{p^2} = \\ &= \frac{1-p}{p(p+1)} \cdot \frac{p^2+2p+1}{p^2} \cdot \frac{p^2}{(p+1)(p-1)} = -\frac{1}{p} \end{aligned}$$

Podmínky: $p \neq 1$, $p \neq -1$, $p \neq 0$.

2. V množině reálných čísel najděte všechna řešení logaritmické nerovnice
 $2 \log(x+1) < \log 2 + \log(3-x)$, kde $\log$ značí dekadický logaritmus.

Řešení:

Podmínky: $(x+1) > 0 \wedge (3-x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$

Rovnici upravíme:

$$\begin{aligned}\log(x+1)^2 &< \log(6-2x) \\ x^2 + 2x + 1 &< 6 - 2x \\ x^2 + 4x - 5 &< 0 \\ (x+5)(x-1) &< 0 \Leftrightarrow (x > -5 \wedge x < 1) \vee (x < -5 \wedge x > 1) \\ &\Leftrightarrow x \in (-5, 1)\end{aligned}$$

Množina všech řešení: $P = (-1, 3) \cap (-5, 1) = (-1, 1)$

3. Řešte v množině přirozených čísel rovnici: $\binom{n+3}{n+1} - \binom{n-1}{2} = 2(n^2 - 2)$

a uveďte podmínku, kdy je definována.

Řešení:

Rovnice má smysl pro přirozená čísla n , pro která je $n-1 \geq 2$, tj. $n \geq 3$.

Rovnici přepíšeme: $\frac{(n+3)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 2n^2 - 4$

$$8n + 4 = 4n^2 - 8$$

$$n^2 - 2n - 3 = 0 \Rightarrow n_1 = 3, n_2 = -1$$

Kořen $n_2 = -1$ nevyhovuje zadání.

Řešením rovnice je $n = 3$.

4. V podniku plánovali pro splnění zakázky vyrábět denně 400 přístrojů. Protože se však podařilo vyrobit každý den o 50 přístrojů více, ukončili celou zakázku o 3 dny dříve, než plánovali. Kolik přístrojů pro tuto zakázku vyrobili?

Řešení:

Označme: x ... plánovaný počet dní

Sestavíme rovnici: $x \cdot 400 = (x-3) \cdot 450$

$$5x = 135$$

$$x = 27 \Rightarrow \text{Počet přístrojů: } 27 \cdot 400 = 10800$$

5. Napište rovnici přímky p , která je kolmá na přímkou $q: y = 2x + 3$ a prochází středem kružnice $x^2 + 4x + y^2 = -2$.

Řešení:

Rovnice $p: y = ax + b$, p je kolmá na $q \Rightarrow a = -0,5$

Určíme střed kružnice $S: (x+2)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow S[-2, 0], r = \sqrt{2}$

Tedy: $0 = -\frac{1}{2}(-2) + b \Rightarrow b = -1$

Rovnice přímky p je: $y = -0,5x - 1$.