

Datum: _____

Registrační číslo uchazeče

--	--	--	--	--	--

Hodnocení

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

Varianta 5

UPOZORNĚNÍ: Není dovoleno používat tabulky ani kalkulačky. U řešení každého příkladu musí být uveden postup.

ZADÁNÍ:

1. Určete, za jakých podmínek je výraz definován, a výraz zjednodušte:

$$\frac{-x^2y + xy^2}{x^4 - y^4} \cdot \frac{x^{-2} + y^{-2}}{x^{-1}y^{-1}}.$$

2. V množině reálných čísel najděte všechna řešení logaritmické rovnice

$$3 + (2 - \log x) \cdot \log x = 0,$$

kde $\log$ značí dekadický logaritmus.

3. Přičteme-li ke třem číslům $a = 2$, $b = 9$, $c = 23$ stejné číslo, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Spočítejte součet s_5 jejích prvních pěti členů.

4. Určete všechna čísla $a \in \mathbf{R}$, pro která nemá rovnice $x^2 + 2x - ax + 1 = 0$ reálný kořen.

5. Napište rovnici kružnice, která má střed ve vrcholu paraboly $y = x^2 - 4x - 2$ a prochází počátkem soustavy souřadnic.

ŘEŠENÍ:

1. Určete, za jakých podmínek je výraz definován, a výraz zjednodušte:

$$\frac{-x^2y + xy^2}{x^4 - y^4} \cdot \frac{x^{-2} + y^{-2}}{x^{-1}y^{-1}}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{-x^2y + xy^2}{x^4 - y^4} \cdot \frac{x^{-2} + y^{-2}}{x^{-1}y^{-1}} &= \frac{xy(-x + y)}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)} \cdot \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = \\ &= \frac{xy(-x + y)}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)} \cdot \frac{y^2 + x^2}{x^2y^2} \cdot xy = \frac{xy(-x + y)}{(x + y)(x - y)} \cdot \frac{xy}{x^2y^2} = \frac{-1}{x + y} \end{aligned}$$

Podmínky: $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$, $x \neq -y$

2. V množině reálných čísel najděte všechna řešení logaritmické rovnice $3 + (2 - \log x) \cdot \log x = 0$, kde $\log$ značí dekadický logaritmus.

Řešení:

V rovnici $3 + 2 \log x - \log^2 x = 0$ provedeme substituci $y = \log x$: $3 + 2y - y^2 = 0$
a získáme dvě řešení:

$$y_1 = 3 \Rightarrow \log x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1000$$

$$y_2 = -1 \Rightarrow \log x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = 0,1$$

3. Přičteme-li ke třem číslům $a = 2$, $b = 9$, $c = 23$ stejné číslo, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Spočítejte součet s_5 jejích prvních pěti členů.

Řešení:

Členy geom. posloupnosti budou: $2 + x$, $9 + x$, $23 + x$

a musí platit: $\frac{9+x}{2+x} = \frac{23+x}{9+x}$

Po úpravě: $(9+x)^2 = (23+x)(2+x)$
 $81 + 18x + x^2 = x^2 + 25x + 46$
 $7x - 35 = 0$
 $x = 5$

Je tedy $a_1 = 7$, $q = 2$.

Pro s_5 platí: $s_5 = 7 \cdot \frac{1-2^5}{1-2} = 7 \cdot 31 = 217$

4. Určete všechna čísla $a \in \mathbf{R}$, pro která nemá rovnice $x^2 + 2x - ax + 1 = 0$ reálný kořen.

Řešení:

Rovnice nemá reálný kořen $\Leftrightarrow D < 0$

$$x^2 + (2-a)x + 1 = 0 \quad D = (2-a)^2 - 4 = a^2 - 4a$$

$$D < 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a < 0 \Leftrightarrow a \in (0, 4)$$

5. Napište rovnici kružnice, která má střed ve vrcholu paraboly $y = x^2 - 4x - 2$ a prochází počátkem soustavy souřadnic.

Řešení:

Určíme vrchol paraboly: $y = (x-2)^2 - 6 \Rightarrow V[2, -6]$

Pro poloměr kružnice platí: $r = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40}$

Rovnice kružnice je tedy: $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 40$
 $x^2 - 4x + y^2 + 12y = 0$