

Datum: _____

Registrační číslo uchazeče

--	--	--	--	--	--

Varianta 4

Hodnocení

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

UPOZORNĚNÍ: Není dovoleno používat tabulky ani kalkulačky. U řešení každého příkladu musí být uveden postup.

ZADÁNÍ:

1. Určete, pro která $x \in \mathbf{R}$ je výraz definován, pak výraz zjednodušte:

$$\left[\left(1 + \frac{3x^2}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x-1}{1-2x} \right] : \left(1 + \frac{x}{1+x} \right) .$$

2. V množině reálných čísel nalezněte všechna řešení rovnice: $2^{x-2} = \frac{2}{3^{1-x}} - 2^{x+1}$.

3. Určete součet s_{10} prvních deseti členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí vztahy: $a_4 \cdot a_5 = 60$,
 $a_1 + a_9 = 24$.

4. Jedním čerpadlem se nádrž naplní za 12 hodin, druhým jen za 8 hodin. Za jak dlouho se nádrž naplní, budou-li pracovat obě čerpadla současně?

5. Spočítejte, pro které $k \in \mathbf{R}$ je přímka $y = x - k$ tečnou paraboly $y = x^2 - 3x + 1$.
Určete souřadnice bodu dotyku.

ŘEŠENÍ:

1. Určete, pro která $x \in \mathbf{R}$ je výraz definován, pak výraz zjednodušte:

$$\left[\left(1 + \frac{3x^2}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x-1}{1-2x} \right] : \left(1 + \frac{x}{1+x} \right) .$$

Řešení:

$$\left[\left(1 + \frac{3x^2}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x-1}{1-2x} \right] : \left(1 + \frac{x}{1+x} \right) = \frac{x^2 - 1 + 3x^2}{x^2 - 1} \cdot \frac{x-1}{1-2x} \cdot \frac{1+x+x}{1+x} =$$

$$= \frac{4x^2 - 1}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{1-2x} \cdot \frac{1+x}{1+2x} = \frac{4x^2 - 1}{1-4x^2} = -1$$

Podmínky: $x \neq 1$, $x \neq -1$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -\frac{1}{2}$.

2. V množině reálných čísel nalezněte všechna řešení rovnice: $2^{x-2} = \frac{2}{3^{1-x}} - 2^{x+1}$.

Řešení:

Rovnice je definována pro všechna $x \in \mathbf{R}$.

Přepíšeme: $2^{x-2} = 2 \cdot 3^{x-1} - 2^{x+1}$

$$2^x \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3} - 2^x \cdot 2$$

a vynásobíme 12:

$$3 \cdot 2^x = 8 \cdot 3^x - 24 \cdot 2^x$$

$$2^x (3 + 24) = 8 \cdot 3^x$$

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{8}{27} \Rightarrow x = 3$$

3. Určete součet s_{10} prvních deseti členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí

vztahy: $a_4 \cdot a_5 = 60$,

$$a_1 + a_9 = 24.$$

Řešení: $(a_1 + 3d) \cdot (a_1 + 4d) = 60$

$$\frac{a_1 + (a_1 + 8d) = 24}{(12 - 4d + 3d) \cdot (12 - 4d + 4d) = 60} \Rightarrow 2a_1 + 8d = 24 \Rightarrow a_1 = 12 - 4d$$

$$(12 - d) \cdot 12 = 60$$

$$\Rightarrow d = 7, a_1 = -16$$

$$\text{Spočteme: } a_{10} = a_1 + 9d = 47 \text{ a součet } s_{10} = \frac{(-16 + 47) \cdot 10}{2} = 155$$

4. Jedním čerpadlem se nádrž naplní za 12 hodin, druhým jen za 8 hodin. Za jak dlouho se nádrž naplní, budou-li pracovat obě čerpadla současně?

Řešení:

Označme: počet hodin na čerpání ... x

Musí platit: $\frac{1}{12}x + \frac{1}{8}x = 1$

$$2x + 3x = 24$$

$$x = 4,8 \quad \text{Nádrž}$$

se naplní za 4,8 hod.

5. Spočtete, pro které $k \in \mathbf{R}$ je přímka $y = x - k$ tečnou paraboly $y = x^2 - 3x + 1$. Určete souřadnice bodu dotyku.

Řešení: Hledáme k , aby rovnice $x^2 - 3x + 1 = x - k$ měla právě jedno řešení (tj. $D = 0$).

$$x^2 - 4x + (1 + k) = 0 \Rightarrow D = 16 - 4(1 + k) = 12 - 4k$$

$$D = 0 \Leftrightarrow k = 3. \text{ Pak jediným řešením rovnice je } x = 2.$$

Rovnice tečny je tedy $y = x - 3$ a tečný bod T má souřadnice $T[2, -1]$.