

Datum: \_\_\_\_\_

Registrační číslo uchazeče

--	--	--	--	--	--

Varianta 3

Hodnocení

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

**UPOZORNĚNÍ:** Není dovoleno používat tabulky ani kalkulačky. U řešení každého příkladu musí být uveden postup.

**ZADÁNÍ:**

1. Určete, pro která  $a \in \mathbf{R}$  je daný výraz definován, a zjednodušte jej.

$$\left[ \left( \frac{a}{1-a} - \frac{1}{a} \right) - \left( \frac{-2}{a} - \frac{a-1}{a} \right) \right] : \frac{1}{a-1}$$

2. Určete průsečíky kružnice  $K$ , dané rovnicí  $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4$ , s přímkou  $p$ , danou rovnicí  $y = x - 1$ . Určete rovnici přímky, kolmé k přímce  $p$  a procházející průsečíkem přímky  $p$  s kružnicí  $K$ , ležícím v 1. kvadrantu.
3. Určete množinu všech  $x \in \mathbf{R}$ , která splňují nerovnici  $1 < |3 - x| \leq 4$ . Znázorněte určenou množinu graficky.
4. Cena zlata vzrostla v 1. pololetí o 20 %. O kolik procent cena zlata klesla ve 2. pololetí, víte-li, že se po poklesu ceny rovnala devíti desetinám ceny původní?
5. Určete v intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$  všechna řešení rovnice  $\sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 0$  s neznámou  $x$ .

**ŘEŠENÍ:**

1. Určete, pro která  $a \in \mathbf{R}$  je daný výraz definován, a zjednodušte jej.

$$\left[ \left( \frac{a}{1-a} - \frac{1}{a} \right) - \left( \frac{-2}{a} - \frac{a-1}{a} \right) \right] : \frac{1}{a-1}$$

**Řešení:**Podmínky:  $a \neq 0, a \neq 1$ 

$$\left[ \left( \frac{a}{1-a} - \frac{1}{a} \right) - \left( \frac{-2}{a} - \frac{a-1}{a} \right) \right] : \frac{1}{a-1} = \frac{a^2 - (1-a) - (1-a)(-2-a+1)}{a(1-a)} (a-1) = -1.$$

2. Určete průsečíky kružnice  $K$ , dané rovnicí  $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4$ , s přímkou  $p$ , danou rovnicí  $y = x - 1$ . Určete rovnici přímky, kolmé k přímce  $p$  a procházející průsečíkem přímky  $p$  s kružnicí  $K$ , ležícím v 1. kvadrantu.

**Řešení:**

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4$ , dosadíme  $y = x - 1$  do rovnice kružnice:

$$x^2 - 4x + 4 + (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$$

Průsečíky kružnice  $K$  s přímkou  $p$  jsou  $A = [0, -1]$ ,  $B = [2, 1]$ .

V 1. kvadrantu leží bod  $B$ .

Rovnice přímky, která je kolmá k přímce  $p$  a prochází bodem  $B$ , je  $y = -x + 3$ .

3. Určete množinu všech  $x \in \mathbf{R}$ , která splňují nerovnice  $1 < |3 - x| \leq 4$ . Znázorněte určenou množinu graficky.

**Řešení:**

$$1 < |3 - x| \leq 4 \Leftrightarrow \underbrace{x > 3 \wedge (1 < x - 3 \wedge x - 3 \leq 4)}_{4 < x \leq 7} \vee \underbrace{x \leq 3 \wedge (1 < 3 - x \wedge 3 - x \leq 4)}_{-1 \leq x < 2}$$

Dané nerovnice jsou splněny pro všechna  $x \in \langle -1, 2 \rangle \cup (4, 7)$ .

4. Cena zlata vzrostla v 1. pololetí o 20 %. O kolik procent cena zlata klesla ve 2. pololetí, víte-li, že se po poklesu ceny rovnala devíti desetinám ceny původní?

**Řešení:**

$$cn = c + 0,2c \Rightarrow cn = 1,2c$$

$$cnn = 0,9c$$

$$cnn = cn - d \cdot cn \Rightarrow 0,9c = 1,2c - d \cdot 1,2c \Rightarrow d = 0,25.$$

Cena zlata poklesla ve 2. pololetí o 25 %.

5. Určete v intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$  všechna řešení rovnice  $\sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 0$  s neznámou  $x$ .

**Řešení:**

$$\sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = \pm \cos x \text{ v intervalu } \langle 0, \pi \rangle.$$

$$\sin x = 0 \text{ v intervalu } \langle 0, \pi \rangle \Leftrightarrow x = 0, \pi,$$

$$\sin x = \pm \cos x \text{ v intervalu } \langle 0, \pi \rangle \Leftrightarrow x = \pi/4, 3\pi/4.$$

Všetchna řešení daní rovnice v intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$  jsou  $x = 0$ ,  $x = \pi/4$ ,  $x = 3\pi/4$  a  $x = \pi$ .