

Datum: _____

Registrační číslo uchazeče

--	--	--	--	--	--

Hodnocení

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

Varianta 2

UPOZORNĚNÍ: Není dovoleno používat tabulky ani kalkulačky. U řešení každého příkladu musí být uveden postup.

ZADÁNÍ:

1. Určete, pro která $x \in \mathbf{R}$ je daný výraz definován, a zjednodušte jej:

$$\left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)^{-1} : \left(\frac{2}{7x-3} + \frac{5}{7x+4}\right).$$

2. Určete množinu všech $x \in \mathbf{R}$, která splňují nerovnici $|2x-6| \leq x$.

Znáznorněte určenou množinu graficky.

3. Prvky posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou definovány vzorcem $a_n = a_{n-1} + (-1)^{n-2} a_{n-2}$ pro $n = 3, 4, \dots$. Určete členy a_1, a_2 , víte-li, že $a_3 = 5, a_4 = 8$.

4. Jsou dány dvě paraboly $y = x^2 - 4x - 4$ a $y = -x^2 - 6x + 20$.

Určete obecný tvar rovnice přímky, která je určena průsečíky těchto dvou parabol.

5. Určete v množině reálných čísel všechna řešení rovnice $\log(2x-1) = \log 1 - \log(3-x)$ s neznámou x . (log značí dekadický logaritmus)

ŘEŠENÍ:

1. Určete, pro která $x \in \mathbf{R}$ je daný výraz definován, a zjednodušte jej.

$$\left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)^{-1} : \left(\frac{2}{7x-3} + \frac{5}{7x+4}\right)$$

Řešení:

$$x \neq -4, x \neq 3, x \neq 1, x \neq -1$$

$$\frac{\left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)^{-1}}{\left(\frac{2}{7x-3} + \frac{5}{7x+4}\right)} = \frac{x^2-1}{x-3} \cdot \frac{\frac{2}{7}(x+4) + \frac{5}{7}(x-3)}{(x-3)(x+4)} = \frac{(x^2-1)(x-3)(x+4)}{(x-3)(x-1)} = (x+4)(x+1)$$

2. Určete množinu všech $x \in \mathbf{R}$, která splňují nerovnici $|2x - 6| \leq x$. Znázorněte určenou množinu graficky.

Řešení:

$$|2x - 6| \leq x \Leftrightarrow \underbrace{x < 3 \wedge -2x + 6 \leq x}_{2 \leq x < 3} \vee \underbrace{x \geq 3 \wedge 2x - 6 \leq x}_{3 \leq x \leq 6}.$$

Daná nerovnice je splněna pro všechna $x \in \langle 2, 6 \rangle$.

3. Prvky posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou definovány vzorcem $a_n = a_{n-1} + (-1)^{n-2} a_{n-2}$ pro $n = 3, 4, \dots$.
Určete členy a_1, a_2 , víte-li, že $a_3 = 5, a_4 = 8$.

Řešení:

$$\left. \begin{array}{l} a_3 = a_2 + (-1)^1 a_1 = a_2 - a_1, \\ a_4 = a_3 + (-1)^2 a_2 = a_2 - a_1 + a_2 = 2a_2 - a_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_2 - a_1 = 5 \\ 2a_2 - a_1 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = -2 \\ a_2 = 3 \end{array}$$

První a druhý člen posloupnosti jsou: $a_1 = -2, a_2 = 3$.

4. Jsou dány dvě paraboly $y = x^2 - 4x - 4$ a $y = -x^2 - 6x + 20$. Určete obecný tvar rovnice přímky, která je určena průsečíky těchto dvou parabol.

Řešení:

Určíme průsečíky daných parabol $y = x^2 - 4x - 4$ a $y = -x^2 - 6x + 20$, tj. řešíme rovnici

$$x^2 - 4x - 4 = -x^2 - 6x + 20 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0.$$

Kořeny jsou $x_1 = -4, x_2 = 3$.

Průsečíky parabol jsou body $A = [-4, 28], B = [3, -7]$.

Rovnice přímky určené body $A = [-4, 28], B = [3, -7]$ je $5x + y - 8 = 0$.

5. Určete v množině reálných čísel všechna řešení rovnice $\log(2x - 1) = \log 1 - \log(3 - x)$ s neznámou x .

Řešení:

$$x > 1/2, x < 3 \Leftrightarrow x \in (1/2, 3)$$

$$\log(2x - 1) - \log(3 - x) = \log 1 \Leftrightarrow \log \frac{2x - 1}{3 - x} = \log 1 \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{3 - x} = 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 - x \Leftrightarrow x = 2/3.$$

Rovnice má právě jedno řešení $x = \frac{2}{3}$.