

Datum: _____

Registrační číslo uchazeče

--	--	--	--	--

Hodnocení

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

Varianta 7

UPOZORNĚNÍ: Není dovoleno používat tabulky ani kalkulačky. U řešení každého příkladu musí být uveden postup.

ZADÁNÍ:

1. Stanovte, pro která $a \in \mathbf{R}$ je daný výraz definován, a výraz zjednodušte.

$$\left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a} \right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1 \right)$$

2. Určete všechna $x \in \mathbf{R}$, která řeší rovnici $2 \sin^2 x + 7 \cos x - 5 = 0$.

3. Pro geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí $a_1 = 1$. Určete $n \in \mathbf{N}$, pro něž platí $a_n = 243$ a částečný součet $s_n = 364$.

4. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází středem úsečky AB a je rovnoběžná s přímkou procházející body C a D ; $A = [-1, 1]$, $B = [3, 7]$, $C = [2, 2]$, $D = [5, 3]$.

5. První výrobní linka by zpracovala sadu výrobků za 15 hodin, druhá za 12 hodin. Pokud pracují současně první, druhá i třetí linka, zpracují společně sadu výrobků za 4 hodiny. Za jak dlouho by sadu výrobků zpracovala samotná třetí linka?

Řešení:

1. Výraz má smysl, pokud $a \in (-1, 1)$.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a} \right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1 \right) = \\ & = \frac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}} : \frac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}}{3 + \sqrt{1-a^2}} = \sqrt{1-a}. \end{aligned}$$

2. $2 \sin^2 x + 7 \cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 7 \cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow -2 \cos^2 x + 7 \cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0,$

provedeme substituci $y = \cos x$ a obdržíme rovnici $2y^2 - 7y + 3 = 0$, která má kořeny

$$y_1 = 3, \quad y_2 = \frac{1}{2};$$

jelikož $\cos x \in \langle -1, 1 \rangle$ pro všechna $x \in \mathbf{R}$, uvažujeme pouze $\cos x = \frac{1}{2}$,

což platí právě tehdy, když

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{nebo} \quad x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$3. \quad a_n = a_1 q^{n-1} = 243, \quad 364 = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \Leftrightarrow 364 = \frac{243 \cdot q - 1}{q - 1} \Leftrightarrow 364q - 364 = 243q - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow q = 3 \Rightarrow 3^{n-1} = 243 = 3^5 \Leftrightarrow n = 6.$$

4. Směrový vektor \mathbf{u} hledané přímky p má tvar $\mathbf{u} = D - C = (3, 1)$, přímka p má rovnici $x - 3y + c = 0$, $S_{AB} = \frac{A+B}{2} = [1, 4]$, protože $S_{AB} \in p$, dostaneme po dosazení souřadnic bodu S_{AB} do rovnice přímky p : $1 - 12 + c = 0 \Leftrightarrow c = 11$, rovnice hledané přímky p : $x - 3y + 11 = 0$.

5. První linka zpracuje za 1 hodinu $\frac{1}{15}$ sady výrobků, druhá linka $\frac{1}{12}$ sady výrobků.

$$\frac{1}{15} \cdot 4 + \frac{1}{12} \cdot 4 + \frac{1}{x} \cdot 4 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{60 \cdot 4}{24} = 10.$$

Třetí linka by zpracovala sadu výrobků za 10 hodin.