

Datum: _____

Registrační číslo uchazeče

--	--	--	--	--

Hodnocení

Varianta 5

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

UPOZORNĚNÍ: Není dovoleno používat tabulky ani kalkulačky. U řešení každého příkladu musí být uveden postup.

ZADÁNÍ:

1. Stanovte, pro která $a \in \mathbf{R}$ je daný výraz definován, a výraz zjednodušte.

$$(2+a) \cdot \left(1 - \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}\right) : \left(1 - \frac{4}{a^2}\right)$$

2. Určete $x \in \mathbf{R}$, která řeší rovnici $2^{x+1} + 4 \cdot 2^x = 96$.
3. V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvním členem $a_1 = 36$ a kvocientem q platí pro součet s_3 prvních tří členů posloupnosti, že $s_3 \leq 252$. Určete množinu všech q , která mohou být kvocientem této posloupnosti.
4. Napište obecnou rovnici přímky q , která prochází bodem $M = [4, -7]$ a je kolmá k přímce $p: 2x - 5y + 10 = 0$.
5. Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel větších než 3000, v jejichž zápise se mohou vyskytovat pouze a nejvýše jedenkrát číslice 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9.

Řešení:

1. Výraz má smysl, pokud jsou splněny současně podmínky: $a \neq -2 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq 2$.

$$\begin{aligned} & (2+a) \cdot \left(1 - \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}\right) : \left(1 - \frac{4}{a^2}\right) = \\ & = \left((2+a) \cdot \frac{a^2 - 4a + 4}{a^2} \right) : \frac{a^2 - 4}{a^2} = \frac{(2+a) \cdot (a-2)^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{a^2 - 4} = \frac{(a+2) \cdot (a-2)^2}{(a+2) \cdot (a-2)} = a - 2. \end{aligned}$$

2. $2^{x+1} + 4 \cdot 2^x = 96 \Leftrightarrow 2^{x+1}(1+2) = 96 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 32 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^5 \Leftrightarrow x+1 = 5 \Leftrightarrow x = 4$.
3. $a_2 = 36q$, $a_3 = 36q^2$; $36 + 36q + 36q^2 \leq 252 \Leftrightarrow q^2 + q - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (q+3)(q-2) \leq 0 \Leftrightarrow q \in \langle -3, 2 \rangle$.
4. Směrový vektor u přímky p má tvar $u = (5, 2)$; jelikož $q \perp p$, směrový vektor v hledané přímky q má tvar $v = (-2, 5) \Rightarrow$ rovnice přímky q :
 $5x + 2y + c = 0$, protože $M \in q \Rightarrow c = -6$;
 Obecná rovnice přímky $q: 5x + 2y - 6 = 0$.
5. Číslice 1 a 2 nemohou být na první pozici, počet čísel požadovaných vlastností je roven $5 \cdot V_3(6) = 5(6 \cdot 5 \cdot 4) = 5(120) = 600$.