

Datum: _____

Registrační číslo uchazeče

--	--	--	--	--

Hodnocení

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

Varianta 1

UPOZORNĚNÍ: Není dovoleno používat tabulky ani kalkulačky. U řešení každého příkladu musí být uveden postup.

ZADÁNÍ:

1. Stanovte, pro která $a \in \mathbf{R}$ je daný výraz definován, a výraz zjednodušte.

$$\left(\frac{1}{a+1} - \frac{2a}{a^2-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{a} - 1 \right).$$

2. Určete všechna $x \in \mathbf{R}$, která jsou řešením rovnice $2^{2x+1} + 7 \cdot 2^x - 4 = 0$.

3. V aritmetické posloupnosti $(a)_{n=1}^{\infty}$ je první člen $a_1 = 18$ a diference $d = -5$.

Určete $n \in \mathbf{N}$ takové, aby platilo $a_n + a_{n+3} = -189$.

4. Napište obecnou rovnici tečny kružnice v bodě dotyku $T = [6, 2]$, jestliže střed kružnice má souřadnice $S = [3, -4]$.

5. Zjistěte, pro která reálná čísla x platí, že čtvrtý člen binomického rozvoje výrazu $(1+x)^6$ je čtyřikrát větší než jeho třetí člen.

Řešení:

1. Výraz má smysl, pokud jsou současně splněny současně podmínky: $a \neq -1 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq 1$.

$$\left(\frac{1}{a+1} - \frac{2a}{a^2-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{a} - 1 \right) = \frac{a-1-2a}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{1-a}{a} = \frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)(a-1)a} = \frac{1}{a}.$$

2. $2 \cdot (2^x)^2 + 7 \cdot 2^x - 4 = 0$; užitím substituce $y = 2^x$ dostaneme rovnici

$$2y^2 + 7y - 4 = 0, \text{ její kořeny jsou } y_1 = -4, y_2 = \frac{1}{2};$$

jelikož 2^x je vždy kladná hodnota, užijeme pouze kořen y_2 ,

$$2^x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1.$$

3. Pro aritmetickou posloupnost platí $a_n = a_1 + (n-1)d$, $a_{n+3} = a_1 + (n+2)d$;

$$a_n + a_{n+3} = 18 + (n-1)(-5) + 18 + (n+2)(-5) = -189 \Leftrightarrow n = 22.$$

4. Směrový vektor daný body $S, T: (3, 6)$, vektor kolmý: $(-6, 3)$, rovnice tečny:

$$3x + 6y + c = 0, \text{ po dosazení bodu } T: 18 + 12 + c = 0 \Leftrightarrow c = -30 \Rightarrow$$

rovnice tečny: $3x + 6y - 30 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 10 = 0$.

$$5. \quad \binom{6}{3} x^3 = 4 \binom{6}{2} x^2 \Leftrightarrow 20x^3 = 60x^2 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$$