

Riešené príklady

1) Jednoduché úrokovanie

Definícia symbolov: K_0 =počiatočná hodnota kapitálu, istina
 u =úrok , p =úroková miera v % , $i=p/100$ – úroková
sadzba , n =dĺžka úrokovacieho obdobia , $p.j.$ = peňažná
jednotka , K_n =budúca hodnota kapitálu , d =diskontná
sadzba

Príklad 1: Aká bude budúca hodnota pôžičky 30000 Sk za 11 mesiacov pri ročnej úrokovej miere 12%.

Riešenie: $K_n = K_0(1+i.n)$, $i=0,12$ $n=11/12$

$$K_n = 30000(1+0,12*11/12) = 33300 \text{ Sk}$$

Príklad 2: Podľa zmluvy je splatnosť dlhu 50000 Sk za 2 roky pri 14% úrokovej a diskontnej miere d . Určte veľkosť matematického dm a obchodného do diskontu.

Riešenie: $dm=?$, $do=?$, $dm = Kn.i.n/(1+i.n) =$
 $= 50000.0,14.2/(1+0,14.2) = 10937,5 \text{ Sk}$

$$do = Kn.d.n = 50000.0,14.2 = 140000 \text{ Sk}$$

Príklad 3: Dodávateľ vystavil firme ELKO dňa 16 mája 1995 zmenku s nominálnou hodnotou 40000 Sk so 7% ročnou úrok.mierou. Dátum splatnosti zmenky je 16 november 1995. Dňa 2. augusta 1995 firma ELKO eskontuje zmenku v banke , ktorá účtuje 9% d . Akú sumu dostane od banky ?

Riešenie: Doba splatnosti zmenky je 6 mesiacov , jej budúca hodnota bude :

$$K_n = K_0(1+i.n) = 40000(1+0,07.0,5) = 41400 \text{ Sk}$$

Od 2. augusta do 16. novembra je 3.30+14 dní , potom suma , ktorú firma ELKO dostane je :

$$K_0 = K_n(1 - d.n) = 41400(1 - 0,09.104/360) = 40323,6 \text{ Sk}$$

Príklad 4: Máme 2 zmenky v nominálnych hodnotách 9800 Sk a 9850 Sk s dobou splatnosti 15. septembra a 10. októbra 1997 při 8% diskontnej miere. Určte dátum ekvivalencie oboch zmeniek.

Riešenie : Nech X je dátum ekvivalencie oboch zmeniek , musí platiť :

$$\begin{aligned}9800(1-0,08.X/360) &= 9850(1-0,08.(X+25)/360) \\ 0,00977.X &= 2,12 \\ X &= 216,9 \sim 217 \text{ dní}\end{aligned}$$

Po odpočítaní 217 dní od 15.9.1997 dostaneme dátum ekvivalencie 11.2.1997.

Pre K_0 platí : $K_0 = 9800(1-0,08.217/360) = 9386,49 \text{ Sk}$

Príklad 5: Obchodník kúpi 15.2.1997 dve zmenky při rovnakej ročnej disk.sadzbe d a za každú zaplatí rovnakú sumu. Prvá má hodnotu 14200 Sk a je splatná 10.12.1997, druhá má hodnotu 14600 Sk a je splatná 25.12.1997. Aká je d ?

Riešenie : Prítomné hodnoty zmeniek sa rovnajú $K_{01} = K_{02}$

$$\begin{aligned}14200(1-d.56/365) &= 14600(1-d.71/365) \\ d &= 6\%\end{aligned}$$

Kúpa sa zrealizuje při 6 % diskontnej sadzbe.

2) Zložené úrokovanie

Príklad 1: Čo je pre veriteľa výhodnejšie zaplatiť ?

a) 100000 Sk o 2 roky, alebo

b) 68000 Sk teraz a 25000 Sk o 3 roky, ak je ročná úroková miera 7,5 % .

Riešenie: $K_n = K_0(1+i)^n$, súčasná hodnota splátky bude :
 $K_0 = K_n / (1+i)^n$

a) súčasná hodnota je: $100000 / (1+0,075)^2 =$
 $= 86533,26$ Sk

b) $68000 + 25000 / (1+0,075)^3 = 88124,01$ Sk

Pre veriteľa je výhodnejšia druhá možnosť , pre dlžníka prvá.

Príklad 2 : Aká bude akumulovaná hodnota kapitálu $K_0 = 30000$ Sk pri ročnej úrokovej miere $i = 0,08$ od 1.5.1992 do 30.9.1995.

Riešenie : Je to príklad na zmiešané úrokovanie. Za obdobie od 1.5.1992 do 31.12.1992 použijeme jednoduché úrokovanie , od 1.1.1993 do 31.12.1994 zložené a od 1.1.1995 do 30.9.1995 opäť jednoduché úrokovanie.

$$K_n = 30000(1 + 245/360 \cdot 0,08)(1 + 0,08)^2(1 + 273/360 \cdot 0,08)$$
$$K_n = 39135,55 \text{ Sk}$$

Akumulovaná hodnota kapitálu bude 39135,55 Sk.

Príklad 3: Predpokladajme , že máme 10% ročnú efektívnu úrokovú mieru i_e . Aká je nominálna úroková miera konvertovaná štvrtročne ?

Riešenie : nominálnu úrokovú mieru j vypočítame zo vzťahu :
 $j = m \cdot [(1+i_e)^{1/m} - 1]$, kde m je počet konverzií
 $j = 4 \cdot [(1,1)^{1/4} - 1] = 0,0964$

Nominálna úroková miera je 9,64 % .

Príklad 4: Obchodník má zaplatiť 20000 Sk 1.1.1997, 30000 Sk 1.1.1998 a 40000 Sk 1.1.1999. Nájdite hodnotu týchto platieb pri ročnej intenzite úrokovania $j=0,08$
a) k 1.1.1996
b) k 1.5.1997 .

Riešenie : ide o spojité úrokovanie, platí $K_n = K_0 \cdot e^{j \cdot n}$, pre súčasnú hodnotu platí : $K_0 = K_n \cdot e^{-j \cdot n}$, potom súčasná hodnota dlhu je :

a) $K_0 = 20000 \cdot e^{-0,08 \cdot 1} + 30000 \cdot e^{-0,08 \cdot 2} + 40000 \cdot e^{-0,08 \cdot 3} = 75491,75$ Sk

b) Hodnota dlhu k 1.5.1997 je :
 $K_n = 75491,75 \cdot e^{0,08 \cdot 16/12} = 83989,36$ SK

Príklad 5 : Vypočítajte ekvivalentnú efektívnu ročnú úrokovú mieru i_e v každom z nasledujúcich prípadov :

- a) 250000 Sk, ktoré sa vyplatia o 15 rokov za 100000 Sk investovaných teraz,
b) 13% úrok vyplácaný na konci každých 2 rokov, ročný 6% úrok konvertovaný mesačne.

Riešenie : pre i_e platí : $i_e = (1+j/m)^m - 1$

a) $100000(1+i)^{15} = 250000$
 $(1+i)^{15} = 2,5$ $i_e = 6,3\%$

b) $(1+i)^2 = 1,13$ $i = 6,3\%$

c) $1+i = (1+0,06/12)^{12} = 1,06167$, $i = 6,17\%$

3) Rentový počet

Nové symboly : **R** – splátka renty, **S_n** – budúca hodnota renty, **A_n** – prítomná hodnota renty, **n** – počet časových periód renty, **p** – počet splátok za rok

Príklad 1 : Pán Králik si v stavebnom sporení určil cieľovú sumu 500000 Sk, ktorú chce našetriť za 10 rokov. Aké veľké ročné vklady musí vkladať na účet každý rok pri ročnej úrokovej sadzbe $i = 0,12$.

Riešenie : Máme vypočítať veľkosť splátky pri polehotnej rente, ktorú určíme zo vzťahu :

$$R = S_n \cdot i / (1+i)^n - 1 = 500000 \cdot 0,12 / (1,12)^{10} - 1 = \underline{28492 \text{ Sk}}$$

Príklad 2 : Za koľko rokov našetri Peter na auto sumu 240000 Sk, ak vkladá do banky na začiatku každého roka 15000 Sk pri 11% ročnej úrokovej miere.

Riešenie : Ide o predlehotnú rentu a máme vypočítať počet rokov n .

$$\begin{aligned} n &= \ln((S_n \cdot i / (R(1+i)) + 1) / \ln(1+i)) = \\ &= \ln((240000 \cdot 0,11 / 15000 \cdot (1+0,11)) + 1) / \ln(1+0,11) = \\ &= \underline{9,1 \text{ rokov}} \end{aligned}$$

Príklad 3 : Spoločnosť uložila do banky kapitál z ktorého chce vyplácať svojim zamestnancom odmeny 80000 Sk štvrťročne. Aká je veľkosť tohoto kapitálu ak sa úročí na konci každého polroka ročnou sadzbou $p = 8\%$.

Riešenie : Máme vypočítať prítomnú hodnotu večnej renty A_v , ktorú dostaneme zo vzťahu :

$$\begin{aligned} A_n &= R / (1+j/m)^{m/p} - 1 = 80000 / (1+0,08/2)^{2/4} - 1 = \\ &= \underline{4039607,805 \text{ Sk}} \end{aligned}$$

Príklad 4 : Aká veľká suma sa nazbiera v Zivotnej poisťovni na účte klienta, ktorý štyri krát ročne prispieva čiastkou 5000 Sk po dobu 20 rokov a vklad je úročený polročne úrokovou mierou $j= 6\%$.

Riešenie : Máme vypočítať budúcu hodnotu S_n p-termínovej renty.

$$\begin{aligned} S_n &= R(1+j/m)^{m \cdot n} - 1 / (1+j/m)^{m/p} - 1 = \\ &= 5000 \cdot (1+0,06/2)^{20 \cdot 2} - 1 / (1+0,06/2)^{2/4} - 1 = \underline{759625,9 \text{ Sk}} \end{aligned}$$

Príklad 5 : Aké veľké ročné platby musí otec poukazovať na účet syna, aby tento mal na účte ako 20 ročný sumu 100000 Sk, ak vklady sú úročené spojitým úrokováním s úrokovou mierou $j= 7\%$ polročne a syn má teraz 14 rokov.

Riešenie : Máme vypočítať veľkosť splatky pri spojitom úrokování :

$$\begin{aligned} R &= S_n / e^{j \cdot n} - 1 / e^{j/p} - 1 = 100000 / e^{0,07 \cdot 6} - 1 / e^{0,07/2} - 1 = \\ &= \underline{6824,2 \text{ Sk}} \end{aligned}$$

4) Umorovací počet

Definícia nových symbolov : D- výška dlhu, a- výška splátky(anuita)

Príklad 1 : Občan má splatiť pôžičku 5000000 Sk polehotnými ročnými splátkami. Prvá splátka bude 250000 Sk a každá ďalšia dvojnásobok predchádzajúcej. Zostavte umorovací plán pri 12% ročnej úrokovej miere.

Riešenie : Ide o dlh s nerovnakými splátkami.Zostavíme si umorovací plán.

počet rokov	anuita	úrok	úmor	dlh
0	-----	-----	-----	5000000
1	850000	600000	250000	4750000
2	1070000	570000	500000	4250000
3	1510000	510000	1000000	3250000
4	2390000	390000	2000000	1250000
5	1400000	150000	1250000	0
Súčet	7220000	2220000	5000000	

Príklad 2 :Dlh 10000000 Sociálnej poisťovni má byť splatený polehotnými anuitami.Prvá splátka má byť odložená o 4 roky a bude 4500000 Sk.Každá ďalšia je o 1000000 vyššia ako predchádzajúca.Aký je umorovací plán ak ročná úroková miera je 10 %.

Riešenie :

<i>počet rokov</i>	<i>anuita</i>	<i>úrok</i>	<i>úmor</i>	<i>dlh</i>
0	-----	-----	-----	10000000
1	-----	1000000	-----	11000000
2	-----	1100000	-----	12100000
3	-----	1210000	-----	13310000
4	-----	1331000	-----	14641000
5	4500000	1464100	3035900	11605100
6	5500000	1160510	4339490	7265610
7	6500000	726561	5773439	1492171
8	1641388	149217,1	1492171	
<i>Súčet</i>	18141388	3500388,1	14641000	

Príklad 3 : Dotácia 7500000 Sk má byť umorená za 9 rokov pri ročnej úrokovej miere 7 %. Aké veľké budú ročné splátky.

Riešenie : Máme vypočítať veľkosť anuity **a** .Použijeme vzorec:

$$a = D \cdot i / (1 - v)^n, \quad v = 1 / (1 + i)$$

$$a = 7500000 \cdot 0,07 / (1 - (1 / 1,07))^9 = 1151148,526 \text{ Sk}$$

Príklad 4 : Investičná pôžička 13000000 sa má splatiť ročnými splátkami 2000000 Sk pri 15 % ročnej úrokovej miere. Určte počet splátok pôžičky.

Riešenie : Počet splátok vypočítam zo vzorca

$$n = \ln(1 - D \cdot i / a) / \ln(1 / (1 + i)) =$$

$$= \ln(1 - 13000000 \cdot 0,15 / 2000000) / \ln(1 / 1,15) = 26,4 \sim$$

~26 splátok

Príklad 5 : Vypočítajte veľkosť poslednej splátky dlhu 75000 Sk, ak poznáme počet splátok $n=6$, výška splátky $a= 15000$ a ročná úroková miera je 8 %.

Riešenie : Veľkosť poslednej splátky **b** vypočítame zo vzorca

$$\begin{aligned} b &= [D - a \cdot (1 - (1/1+i)^n) / i] \cdot (1+i)^{n+1} \\ b &= [75000 - 15000 \cdot (1 - (1/1+0,08)^6) / 0,08] (1+0,08)^{6+1} = \\ &= \underline{9694,77 \text{ Sk}} \end{aligned}$$

www.euroekonom.sk