

## 5 Metody vyhledávání

### 5.1 Asociativní vyhledávání

#### 5.1.1 sekvenční

Pole se sekvenčně prochází = od začátku do konce prvek po prvku :-)))

Pole nemusí být seřazeno.

K urychlení se používá metoda zarážky. Z cyklu while ( $A[i] \neq X \ \& \ i < n$ ) můžeme podmínku  $i < n$  přesunout za cyklus a to tak, že na konec pole vložíme hledaný prvek, čili ten se vždy najde a nemůžeme z pole s indexem vyjet. Pokud  $i = n$  našli jsme vložený prvek a tedy  $X$  v poli není. Pokud je  $i < n$ , hledaný prvek je na pozici  $i$ .

$T_{\min}(n) = 1, T_{\max}(n) = O(n)$

$T_{\text{avg}}(n) = T_{\text{konst}} + T_{\text{VAR}} \cdot (n+1)/2 = O(n)$ , kde  $n+1/2$  značí případ, kdy projdeme polovinu všech dat

Pokud se bude vyhledávat často, vyplatí se pole na začátku seřadit a pak rychle vyhledávat (viz další metody).

#### 5.1.2 binárním půlením

Pole musí být seřazeno.

Rekurzivní alg:

1. vezmu prvek v polovině pole
2. když je to hledaný prvek skončil jsem
3. když je hledaný prvek menší než ten co jsem našel v polovině pole, беру jako nové pole pro hledání už jen pouze levou polovinu a pravou zahodím. Když je prvek větší, tak беру jen pravou polovinu původního pole.
4. pokud je nové pole prázdný interval končíme = prvek v poli není
5. pokračuj rekurzivně 1. krokem

Iterační alg. vypadá tak, že mám index levého a pravého kraje pole ( $L$  a  $P$ ). Jedu v cyklu, když je v půlce větší prvek než hledaný  $A[(L+P)/2] > X$ , posunu pravý index pole  $P = (L+P)/2 - 1$ . V opačném případě posouvám levý  $L = (L+P)/2 + 1$ . Cyklus se opakuje dokud nenaleznu a  $L \geq P$

$T_{\min}(n) = 1, T_{\max}(n) = O(\log_2 n)$ ,

$T_{\text{avg}}(n)$  se nedá určit jednoznačně průměrem, protože pravděpodobnost nalezení prvku nepřímoúměrně závisí na počtu prvků prohledávaného pole a ten je v každém kroku o polovinu menší. Platí, že  $T_{\max}(n) - 1 < T_{\text{avg}}(n) < T_{\max}(n)$ . Prakticky to znamená, že se hledaný prvek nalezne v posledním kroku půlení. Toho využil Dijkstra a z cyklu vyhodil test na nalezení prvku  $A[(L+P)/2] = X$  (test se přesunul za cyklus = pokud  $X$  v poli bylo, je na  $A[L]$  nebo  $A[P]$  podle toho jaká byla použita podmínka pro posun  $L$  a  $P$  při půlení) tím se počet operací v cyklu snížil o třetinu a celková časová složitost klesla (nikoliv však řádově).

#### 5.1.3 interpolační

Používá se v setříděné posloupnosti se znalostí pravděpodobnosti rozložení jednotlivých hodnot (interpolační předpokládá rovnoměrné rozložení hodnot, ale může být i jinak). Princip je podobný jako v binárním půlení, jen s tím rozdílem, že hodnotu netestuji v polovině pole, ale v jiném zlomku. Pro rovnoměrné rozložení na

indexu:  $(X - A[L]) \cdot \frac{(R - L)}{(A[R] - A[L])}$ . Ten zlomek udává „hustotu“. Snažíme se to tedy rozdělit někde tam, kde se

asi bude nacházet ten prvek s hodnotou  $X$ . Složitost je pak  $\log_2 \log_2 n$ .

#### 5.1.4 binární vyhledávací stromy

Binární vyhledávací strom je kořenový uzlově ohodnocený binární strom takový, že pro každý vnitřní uzel  $v$  s levým synem  $v_L$  a pravým synem  $v_P$  platí:  $H(v_L) \leq H(v) \leq H(v_P)$ .  $H(v)$  je ohodnocení uzlu  $v$ .

Hledání je asi jasné po 5 letech na FELu ne? To nebudu popisovat :-)))

$T_{\min}(n) = 1, T_{\max}(n) = T_{\text{avg}}(n) = O(\log_2 n)$

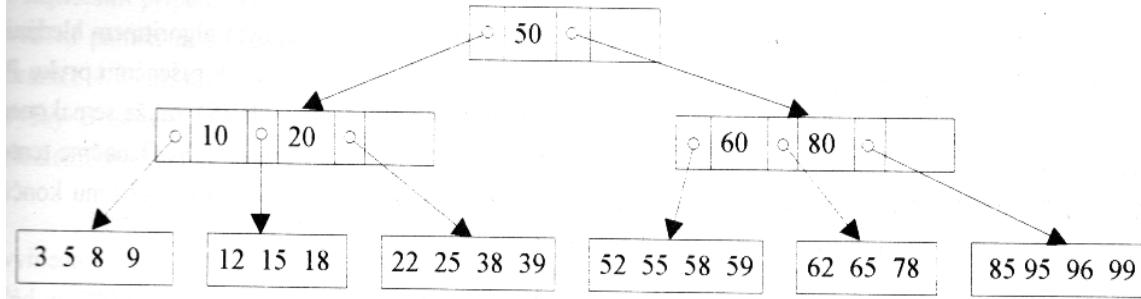
Toto však platí jen pro výškově vyvážené stromy. Těch je několik: (AVL, B, 1-2)

**B-strom** je stromová datová struktura, používaná pro uchovávání dat a vyhledávání v nich. Operace přidání, vyjmutí i vyhledávání probíhají v logaritmicky omezeném čase. Tato struktura je často využívána pro databázové aplikace. B-strom je speciální případ (a,b)-stromu, který poskytuje větší volnost ve volbě minimálního a maximálního počtu potomků.

**Def:** B-stromem stupně  $m$  nad vyhledávacím prostorem  $S = \{p_1, \dots, p_n\}$  rozumíme strom, splňující následující podmínky:

1. Každý uzel kromě kořene a listu má nejméně  $m$  a nejvýše  $2m$  prvků  $p_i$ .
2. Všechny cesty od kořene k listům jsou stejně dlouhé.
3. Pro každé  $p_j$  v podstromu odpovídajícímu odkazu  $p_i - 1$ , platí  $p_j < p_i$
4. Pro každé  $p_k$  v podstromu odpovídajícímu odkazu  $p_i$ , platí  $p_k > p_i$

V principu se jedná o  $(2m)$ -ární strom, kde jednotlivé uzly obsahují minimálně  $m$  a maximálně  $2m$  prvků. Každý uzel obsahuje  $x + 1$  ukazatelů na podstromy nižší úrovně, kde  $x$  je počet prvků  $p_i$  v uzlu. Strom je organizován takto:

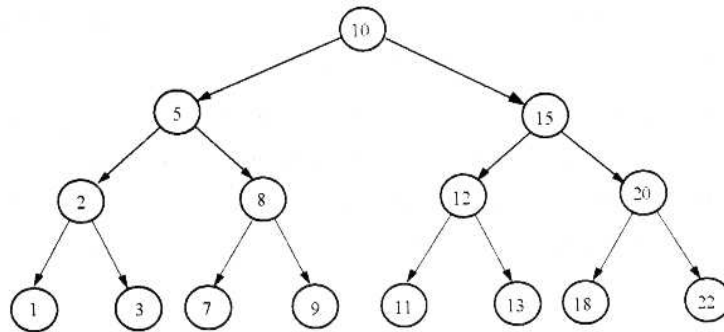


obr. 6.11 B-strom řádu 2

Pěkný animovaný obrázek jak se v něm hledá je na <http://www.bluerwhite.org/btree/>

Problém je při jejich tvorbě, aby byly vyvážené. U AVL se používá jednoduchá a dvojitá rotace. Vyvažování je úplně brutální na popis, to snad ani nemůžou chtít.

### BVS:



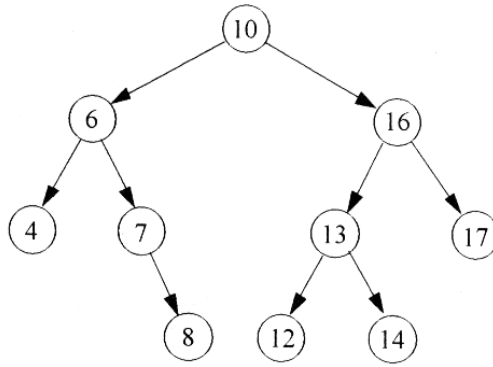
obr. 4.2 BVS množiny  $S = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 18, 20, 22\}$

- reprezentují uspořádanou množinu  $S \subseteq U$ ,  $S = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ , je kořenově ohodnocený binární strom s množinou uzlů  $V$ ,  $|V| = na$  ohodnocením  $\beta$  takovým, že: 1)  $\beta(v) = k_i$ ,  $v \in V$ ,  $k_i \in S$ ; 2) Pro každý uzel  $v$ , který není listem a pro každý uzel  $v_L$ , resp.  $v_P$  v levém resp. v pravém podstromu s kořenem  $v$  platí  $\beta(v_L) \leq \beta(v) \leq \beta(v_P)$ .

Rušení uzlu: 1) uzel má 1 syna – rušený uzel nahradíme synem. 2) uzel má 2 syny – nahrazujeme nejbližším nižším prvkem (prvkem z nejpravější větve levého podstromu) nebo nejbližším vyšším (z nejlevější větve pravého podstromu)

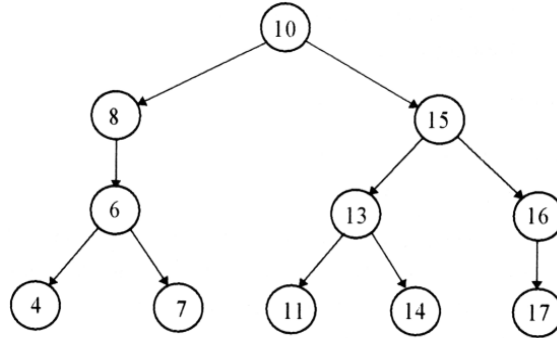
Složitost: čas. slož. NAJDI, VLOZ, ZRUS v nejhorším případě dána délkou nejdelší větve v BVS. U pravidelného BVS –  $Q(n) = D(n) = I(n) \approx \log_2(n+1)$

AVL-strom (71): Výškově vyvážený strom. BVS je AVL právě tehdy, když se výšky levého a pravého podstromu každého uzlu liší nejvýše o 1. Výška AVL stromu je max. o 45% větší než výška BVS.



obr. 4.5 Výškově vyvážený AVL strom

**1-2 strom (74):** klasický BVS s 1) všechny listy mají stejnou vzdálenost od kořene; 2) uzel, který má jednoho syna, má „bratra“ se dvěma syny.



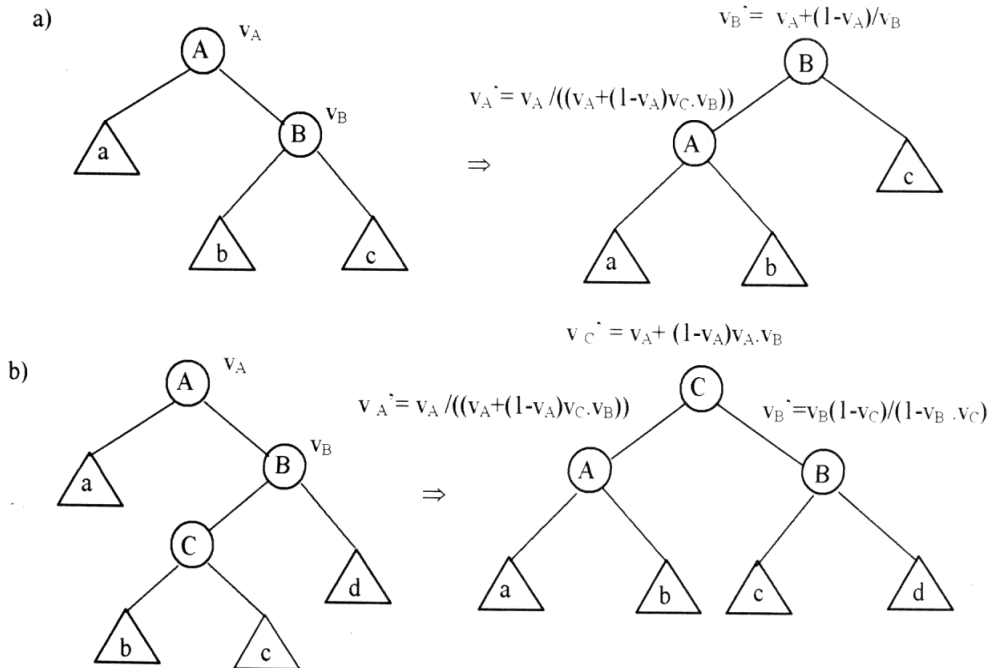
obr. 4.8 1-2 strom

**Váhově vyvážené stromy.** Spočívá ve vyvážení počtu uzlů levého a pravého podstromu každého uzlu. Váha uzlu se definuje jako:

1.  $v(u) = \frac{1}{2}$  pro list
2.  $v(u) = (1 + \text{počet\_uzlů\_levého\_podstromu}) / (1 + \text{počet\_uzlů\_stromu\_s\_kořenem\_}u)$

BVS má ohraničené vyvážení  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 0.5$ , jestliže pro každý uzel platí  $\alpha \leq v(u) \leq 1 - \alpha$ . Ideálně vyvážený strom má  $\alpha = \frac{1}{2}$  (pak se jedná o „pravidelný“ BVS). Např. kořen na obrázku 4.8 (1-2 stromy) má váhu  $v(u_{10}) = 5/12$  nebo  $v(u_{16}) = 1/3$ ,  $v(u_8) = 4/5$ .

**Váhově vyvážený strom (75):** vyvážení počtu uzlů levého a pravého podstromu.



obr. 4.9 Transformace na váhově vyvážených stromech a) jednoduchá rotace. b) dvojitá rotace

**Ohraničené vyvážení  $\alpha$ ,**  $0 \leq \alpha \leq 0.5$ , jestliže pro každý uzel platí:  $\alpha \leq \rho(u) \leq 1 - \alpha$ . Složitost hledání max. 2x ideálně vět. BVS. Čím menší  $\alpha$  tím méně vyvažování, ale delší hledání.

## 5.2 Adresní vyhledávání

Adresní metody jsou založeny na výpočtu adresy hledaného prvku z klíče.

### 5.2.1 přímý přístup

**Def:** Necht' vyhledávací prostor  $S$  je v souvislém intervalu adres  $A[a_{\min}, \dots, a_{\max}]$  a hodnoty klíčů tvoří souvislý interval  $K[k_{\min}, \dots, k_{\max}]$ . Pak zřejmě můžeme nalézt funkci  $f: K \rightarrow A$ ,  $f(k)=a$ , která jednoznačně přidělí klíči z  $K$  adresu z  $A$ .

$f$  je např:  $f(k) = (k - k_{\min}) + a_{\min}$

Takovouto implementaci nazýváme přímým přístupem. Je to ideální implementace neboť všechny operace (najdi, vlož, smaž) mají konstantní časovou složitost  $T(n) = O(1)$ . Bohužel reálné úlohy málokdy vyhovují podmínkám přímého přístupu neboť rozsah identifikačních klíčů (mohutnost universa) je mnohem větší než adresní prostor.

### 5.2.2 rozptylovací funkce

**Def:** Necht'  $K$  je množina klíčů a  $A$  je souvislý adresní prostor.  $|K| \gg |A|$ . Pak zobrazení  $h(k) = a$ ,  $k \in K$ ,  $a \in A$ , nazveme **rozptylovací funkcí** (hash function = hešovací funkce). Různé klíče  $k_1$  a  $k_2$  pro něž platí  $h(k_1) = h(k_2)$  nazveme **synonymy** a jejich zobrazení **kolizí**.

Problém je jak navrhnout hashovací funkci aby generovala co nejméně synonym při optimálním využití paměťového prostoru.

### 5.2.3 zřetězené a otevřené rozptylování

Kolize se řeší v zásadě 2 způsoby:

**Zřetězením synonym** (pole neobsahuje prvek, ale frontu prvků)

$T_{\max}(n) = O(n)$  = v nejhorsím případě rozptylovací fce. generuje samá stejná synonyma = úloha přejde v případě hledání v seznamu.

Vyhledávací prostor je reprezentován řetězy synonym a polem  $V$ . První prvek  $h(k)=a$  se nachází v prvku  $V(a)$ .

Alg. hledání: 1) výpočet rozptyl. fce  $h(k) \Rightarrow$  adresa začátku retezů, 2) vyhledání prvku v retezů. Časová složitost bude dána časem výpočtu funkce  $h(k)$  a časem  $k$  nalezení. Asympt. Složitost operace je v  $Q_{\max}(n) = O(n)$ ,  $n=|S|$

Průměrná: při rovnoměrném pokrytí budou mít všechny retezů delku  $n/m$ .  $Q(n)=t_h+t_c(n/2m)$ , asymptoticky:

$Q_{\text{avg}}(n)=Q(t_h+t_c n/2m)=O(n)$ . Průměrná délka synonym = **poměr plnění  $\beta=n/m$** ,  $m$ =poc. retezů synonym (velikost  $V$ ),  $n$ =počet kliců, např.  $\beta=0.5$  bude  $Q_{\text{avg}}=1.25$

**Otevřeným rozptylováním = rozptylování s otevřenou adresací** (prvky se sekvenčně ukládají do pole na první volnou pozici) hešovací fce není již proměnou klíče, ale ještě kroku opakování. Když chci vložit prvek a zjistím, že už tam je synonymum, zvednu  $i$  a znovu počítám hash fci. Nejjednodušší fce vypadá takto:

$$h(k,i) = (k + i) \bmod m$$

někdy také

$$h(k,i) = (h_1(k) + i) \bmod m$$

nejčastěji však

$$h(k,i) = (h_1(k) + i * h_2(k)) \bmod m$$

$$\text{např: } h(k,i) = ((k \bmod 7) + 3i) \bmod 7$$

Průměrná složitost vyhledání s otevřeným rozptylováním v poli s plněním  $\beta=n/m$  je:

$$O(T_{\text{avg}}(n,m)) = 1/\beta * \ln(1 / (1 - \beta))$$

Výhody: Není potřeba dynamicky přidělovat paměť, vytvářet nový prvky pro reprezentaci zřetězeného seznamu. Vystačíme si pouze s polem  $V$ .

Nevýhody: Horší  $T_{\text{avg}}$ , Počet klíčů je omezen  $m$  (velikostí  $V$ )

## 5.3 Vícerozměrné vyhledávání

$K$  - rozměrný vyhledávací prostor:

Necht'  $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k$ ,  $|U_i| = u_i$ ,  $i=1\dots k$

$K$ -rozměrný vyhledávací prostor je množina  $S = \{p_1, \dots, p_k\}$ ,  $p_j = [k_{1j}, \dots, k_{kj}, h_j]$ ,  $k_{ij}$  je z  $U_i$ ,  $j = 1\dots n$ ,  $i=1\dots k$

$K$  = rozměr vyhl.prostoru

$n$  = mohutnost vyhl.prostoru

$k_{ij}$  =  $i$ -tý klíč prvku  $p_j$

$h_j = \text{hodnota prvku } p_j$

### Lexikografické uspořádání

Porovnávám klíčů od začátku dokud jsou stejné, až na pozici  $i$  narazím na různé klíče, tak  $p$  je menší nežli  $q \Leftrightarrow$  klíč  $p_i$  je menší nežli klíč  $q_i$

Příklad: „karel“ je menší než „karla“

#### 5.3.1 vyhledávání na úplnou shodu

Dotaz, zda prvek s klíči  $[k_1 \dots k_k]$  je prvkem vyhled.prostotu  $S$ .

Analogie s geometrií = zda je prvek v prostoru

Nejjednodušší je sekvenčně  $T(n,k) = O(n,k)$

Za použití lexikografického uspořádání jsme  $K$  rozměrný problém převedli na jednorozměrný a můžeme použít metodu binárního půlení.

Pak  $T(n,k) = O(k * \log_2 n)$

#### 5.3.2 částečnou shodu

Jsou dány hodnoty některých z klíčů, např.  $[? k_2 ? k_4]$ , hledají se všechny prvky z  $S$ , jejichž klíče jsou shodné se zadanými klíči.

Analogie ve 2D prostoru =  $[3 ?]$  všechny body v přímce se souřadnicí  $x = 3$

Nejjednodušší je sekvenčně  $T(n,q) = O(n,q)$ , kde  $q =$  počet zadaných klíčů k porovnávání. Pokud je jedním z daných klíčů první klíč a pole je lexikograficky uspořádané, můžeme k omezení výsledku použít nejprve binární hledání podle prvního klíče a teprve poté z výsledku sekvenčně hledat podle ostatních klíčů.

Pokud na začátku srovnáme jednotlivé klíče odděleně – vytvoříme indexy – můžeme pro každý hledaný klíč samostatně použít binární půlení. Tím dostaneme množinu potencionálních výsledků a z ní pak hledáme průnik přes všechny dané klíče.

#### 5.3.3 intervalovou shodu

Jsou dány intervaly hodnot klíčů  $\langle k_{\min} ; k_{\max} \rangle$  všech nebo opět jen některých klíčů a hledají se prvky  $S$  jejichž klíče leží v zadaných intervalech.

Analogie 2D =  $\langle 1;3 \rangle ; ?$  všechny body se souřadnicí  $x$  mezi 1 a 3 (úsečka)

Nejjednodušší je sekvenčně  $T(n,q) = O(n,q)$ ,  $q =$  počet zadaných intervalů klíčů k porovnávání. Stejně jako na částečnou shodu, akorát výsledek není vždy jeden prvek ale interval. Hledáme buďto stejnou hodnotu nebo pro dolní mez nejbližší vyšší klíč a pro horní nejbližší nižší.

#### 5.3.4 vyhledání nejbližšího souseda

Předpokládejme že na univerzu  $U$  je dána metrika  $\rho$ , to je relace pro kterou platí: když  $p_1, p_2, p_3$  jsou z  $U$

$$\rho(p_1, p_2) = \rho(p_2, p_1)$$

$$\rho(p_1, p_2) \geq 0$$

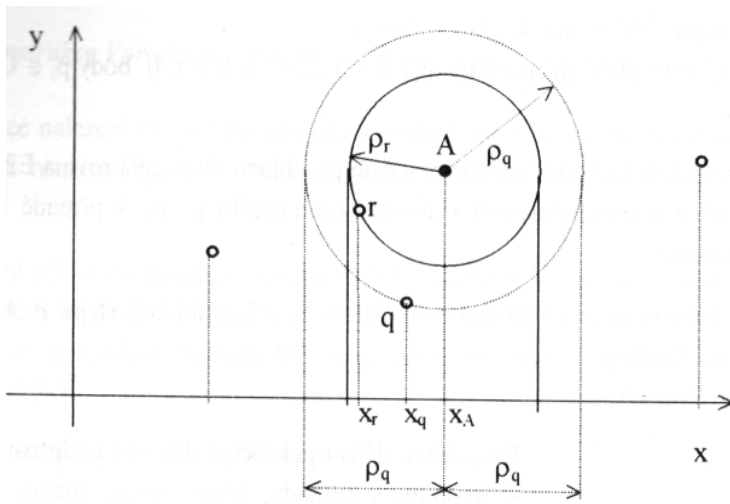
$$\rho(p_1, p_3) \leq \rho(p_1, p_2) + \rho(p_2, p_3) \text{ (to jest trojúhelníková nerovnost)}$$

Je dán prvek  $p$  z  $U$  a hledáme prvek  $q$  z  $S$ , který je v dané metrice  $\rho$  nejbliže prvku  $p$ , to jest pro každé  $r \neq p$  je  $\rho(p, q) \leq \rho(p, r)$

K vyhledávání nejbližšího souseda se používá:

**Naivní řešení:** hledáme-li nejbližšího souseda uzlu  $u$  můžeme vypočítat vzdálenost od každého jiného bodu náležejícího naší množině. Složitost takového počínání je  $O(n)$ , kde  $n$  je počet prvků.

**Metoda projekce:** každá snaha o urychlení naivního řešení vede před omezení prohledávacího prostoru. Jednou možností je projekce do jedné ze souřadnicových os. Celý algoritmus sestává ze tří kroků. 1) najdeme nejbližšího souseda v projekci do některé ze souřadnicových os. 2) vybereme dalšího souseda v projekci  $x$  tak, že  $(|x_A - x_r| \leq \rho_{\min}) \& (\rho_r < \rho_{\min})$ . 3. Jestliže takový bod neexistuje, hledaným nejbližším sousedem je poslední nalezený soused z bodu 2. V opačném případě obsahuje graf jediný bod a nejbližší soused neexistuje. První krok realizujeme v  $O(\log_2 n)$  krocích. Složitost druhého kroku je konstantní. Celková složitost je tedy  $O(k + \log_2 n)$ , kde  $k$  je počet opakování kroku 2. Zřejmě  $k_{\min} = 1$  a  $k_{\max} = n$ .

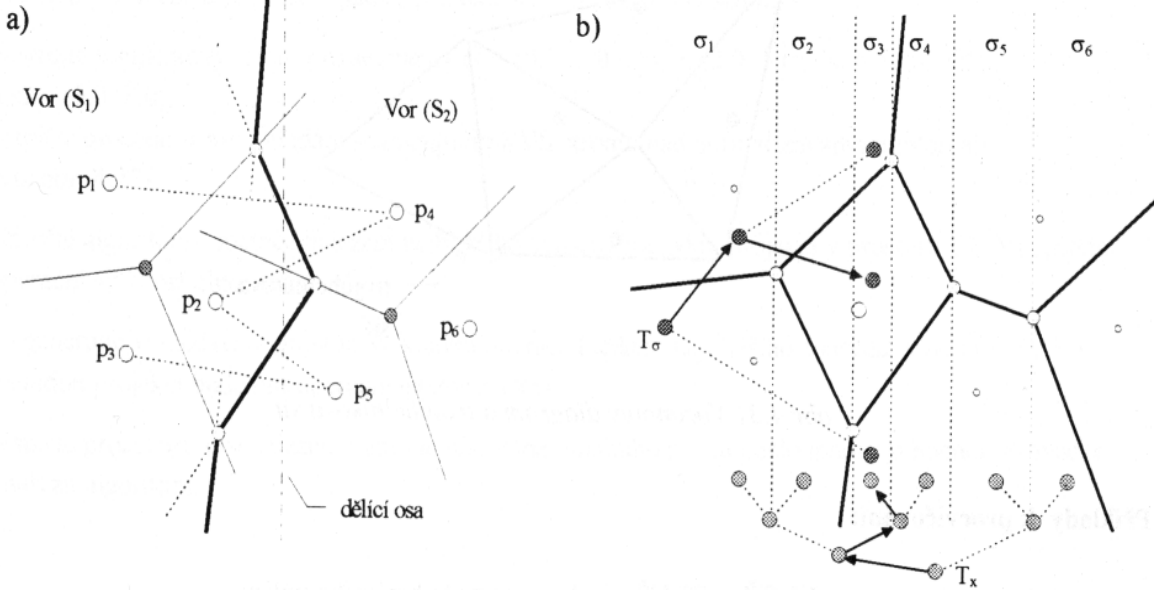


obr. 4.8 Hledání nejbližšího souseda metodou projekci

**Voroniov diagram (VD)**, konstrukce, jak zjistím nejbližší body nového vloženého bodu

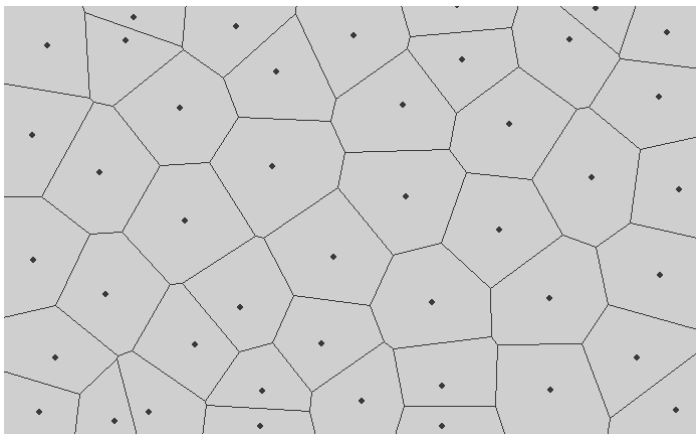
$S = \{p_1, \dots, p_n\}$  = množina bodů.  $H(p_i, p_j)$  = polorovina ohraničená osou úsečky  $p_i, p_j$  obsahující bod  $p_i$ . Průnik polorovin  $V(i) = \bigcap_{j \neq i} H(p_i, p_j)$  je Voroniov polygon. Soustava  $\text{Vor}(S)$  je VD. Je to [1] planární graf [2] každá oblast  $O_i$  je konvexní [3] obsahuje  $|V| = n$  oblastí [4] každý uzel má stupeň alespoň 3 [5] obsahuje  $O(n)$  uzlů a hran [6] pro všechny body platí  $(p_i, p_j) \leq (p_j, p_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $k \neq i$ , tj. body  $p_j \in O_i$  mají nejbližšího souseda bod  $p_i$ .

**Konstrukce:** 1) rozdělit prostor přímkou kolmou na osu  $x$  na  $s_1$  a  $s_2$  stejné mohutnosti 2) rekurzivně vytvoř  $\text{Vor}(s_1)$  a  $\text{Vor}(s_2)$  3) vytvoř  $\text{Vor}(s) = \text{Vor}(s_1) + \text{Vor}(s_2)$ . **Nejbližší soused:** 1) vertikálními přímkami procház. uzly sestavit pasy a nad nimi vyvážený BVS  $T_x$  2) každý pas se rozdělí hranami Nad těmito částmi sestavit vyvážený BVS  $T_\sigma$ . 1) ve stromu  $T_x$  vyhledej k danému  $A$  pas  $\sigma_i$  2) ve stromu  $T_\sigma$  vyhledej část obsahující bod  $A \Rightarrow$  oblast VD příslušející bodu  $p_i \in S$ .

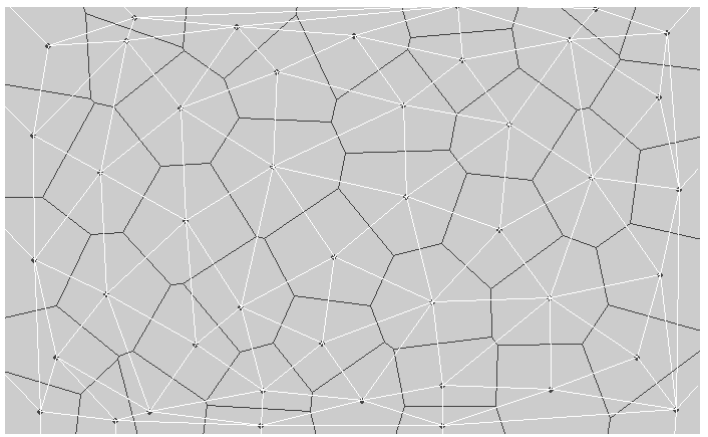


#### 4.30 Konstrukce Voroniovova diagramu a hledání nejbližšího souseda ve Voroniově diagramu

Pamět složitost je  $n^2$ ,  
 $T(n) = \log_2 n$



Voronoi diagram



Triangulace z voroniova diagramu

### 5.3.5 vyhledávací stromy pro vícerozměrné vyhledávání

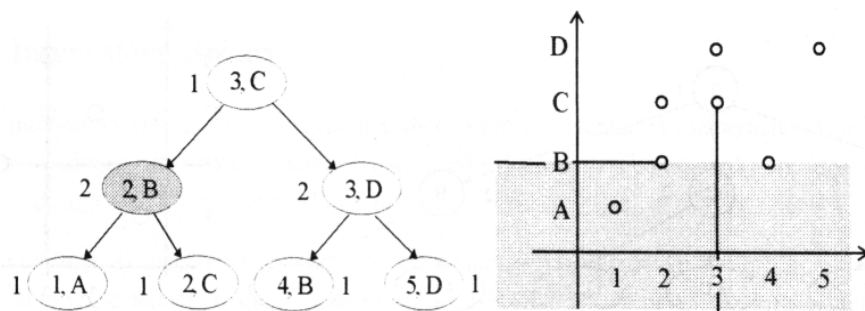
BVS založený na lexikograf.uspoř. – klasický BVS – Dobrý pro hledání na úplnou shodu a na částečnou podle prvního klíče.

$$T(n) = \log_2 n$$

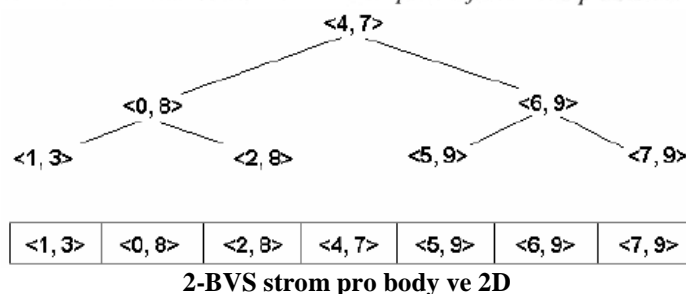
**K-BVS strom** = při stavbě se porovnávají jen  $d$ -té složky prvku ( $d$ -té klíče), této hodnotě  $d$  se říká **diskriminátor**. Diskriminátor je součástí ohodnocení uzlu a odvozuje se ze vzdálenosti uzlu od kořene  $L$ . Ohodnocení uzlu je pak  $\gamma(u) = [p_u, d]$ ,  $p_u = [p_1 \dots p_d \dots p_k]$ ,  $d = (L \bmod k) + 1$

V každém hladině stromu se tedy v uzlu rozhodujeme podle  $d$ -tého klíče. Pokud je v uzlu  $d$ -tý klíč stejný rozhodujeme se podle dalšího tedy  $(d+1 \bmod k)$

Hledání probíhá tak, že hledáme stejné ohodnocení v  $d$ -tém klíči a když ho naleznem, tak testujeme ostatní klíče.



obr. 4.22 D-BVS strom a odpovídající dělení prostoru



2-BVS strom pro body ve 2D

V nejhorším případě, kdy se uzly v každém  $d$  shodují a průměrně se porovnává  $(k+1) / 2$  (polovina) ze zbylých  $k$  klíčů, je  $O(n) = (k+1) / 2 * \log_2(n+1)$

Pokud se však v  $d$  nikdy neshodují, bude

$$O(n) = \log_2(n+1)$$

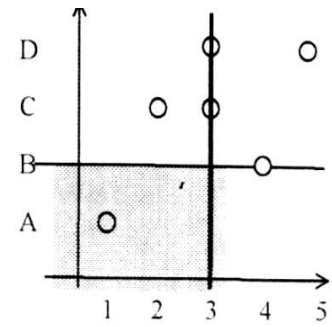
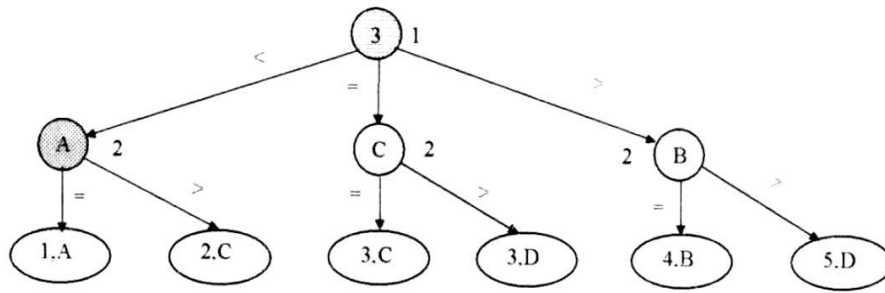
### DD-strom (alias KD strom)

Jako K-BVS (D-BVS) se v každé hladině mění diskriminant. Každý uzel má (může mít) 3 syny – menší, větší, roven (menší a větší se označují jako vlastní synové). Listy reprezentují vyhledávací prostor. Směrem k listům se snižuje v menších a větších podstromech mohutnost vyhled. prostoru. V podstromu rovnosti se snižuje dokonce řád.

Pro ideálně vyvážený KD-strom platí hledání na úplnou shodu

$$T(n) = O(k + \log_2 n)$$

Ideální KD-strom lze zkonstruovat v čase  $n \log_2 n$



obr. 4.23 DD-strom a odpovídající dělení prostoru

### Intervalové stromy (K-IS)

Je vhodný pro intervalovou shodu.

Příklad jednorozměrného intervalového stromu (1-IS)

1. vytvoříme obousměrně zretezený seznam serazených prvků
2. nad tímto seznamem vygenerujeme vyvážený BVS, prvky seznamu budou listy v čase  $O(n \log_2 n)$

1-BVS má paměťovou složitost  $S(n) = O(2n) = O(n)$

Hledání intervalu:

1. Najdi hodnotu  $p \leq K_{\min}$
2. i f  $p > K_{\max}$ , pak je množina hledaných prvků prázdná, jinak počínaje  $K_{\min}$  vybíráme prvky do  $K_{\max}$

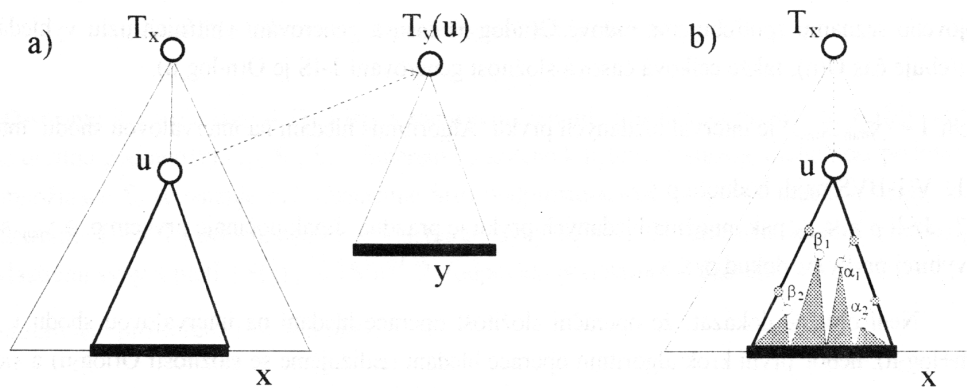
$T(n) = O(m + \log_2 n)$ , kde  $m$  je počet nalezených prvků

Generování vícerozměrného K-IS

2-IS:

1. Vygeneruj 1-IS strom  $T_1$  dle souřadnice  $K_1$

2. Každému vnitřnímu uzlu  $u$  přiřad jednorozměrný IS  $T_2$  s kořenem v  $u$  generovaný dle  $K_2$  nad množinou bodů příslušejících listům podstromu  $T_1$  v  $u$



obr. 4.25 Dvozměrný intervalový strom - a) konstrukce stromu.

b) hledání na intervalovou shodu

Hledání v K-IS:

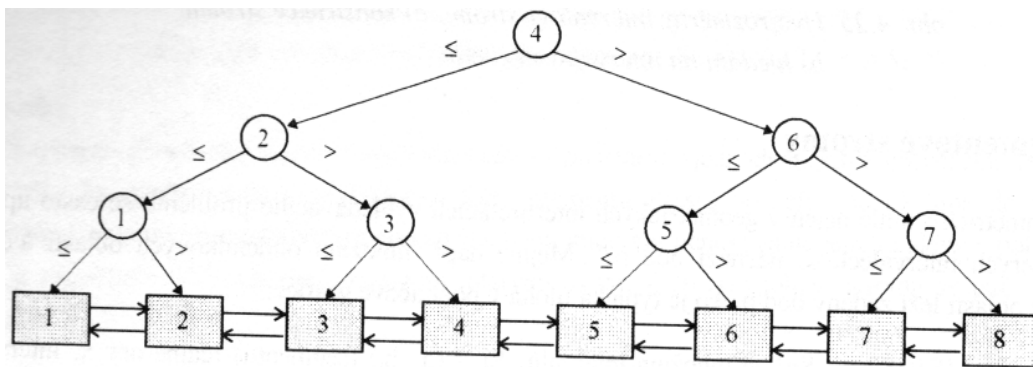
1. Vyhledej v  $T_1$  dolní a horní mez intervalu  $K_{1\min}, K_{1\max}$  (zajímá nás uzel  $u$ , ve kterém se dělí cesty k  $K_{1\min}$  a  $K_{1\max}$ )
2. Označme  $A_1$  až  $A_S$  levé syny uzlu ležících na cestě k  $K_{1\min}$  pod uzlem  $u$
3. Označme  $B_1$  až  $B_S$  pravé syny uzlu ležících na cestě k  $K_{1\max}$  pod uzlem  $u$
4. Intervalové stromy  $T_2(A_i)$  a  $T_2(B_i)$  zaručeně pokrývají interval  $K_{1\min}, K_{1\max}$
5. Hledej na shodu intervalu  $K_{2\min}, K_{2\max}$  v jednorozměrných stromech  $T_2(A_i)$  a  $T_2(B_i)$

Paměťová složitost 2-IS je  $O(n \log_2 n)$

$T(n) = O(m + \log_2^2 n)$

V obecném K-IS je  $S(n) = O(n * \log_2^{k-1} n)$  a  $T(n) = O(m + \log_2^k n)$





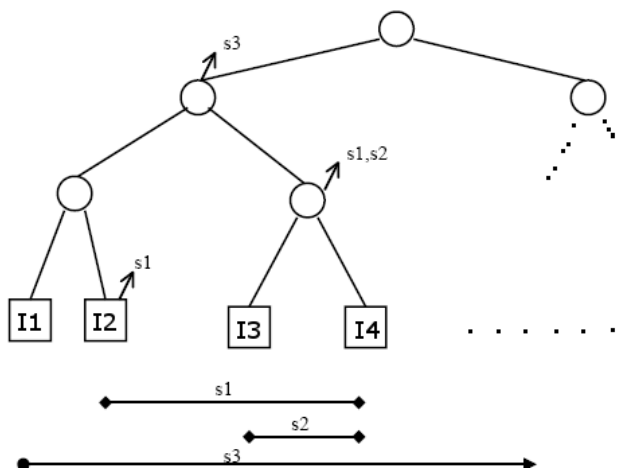
obr. 4.24 Jednorozměrný intervalový strom

### Segmentové stromy

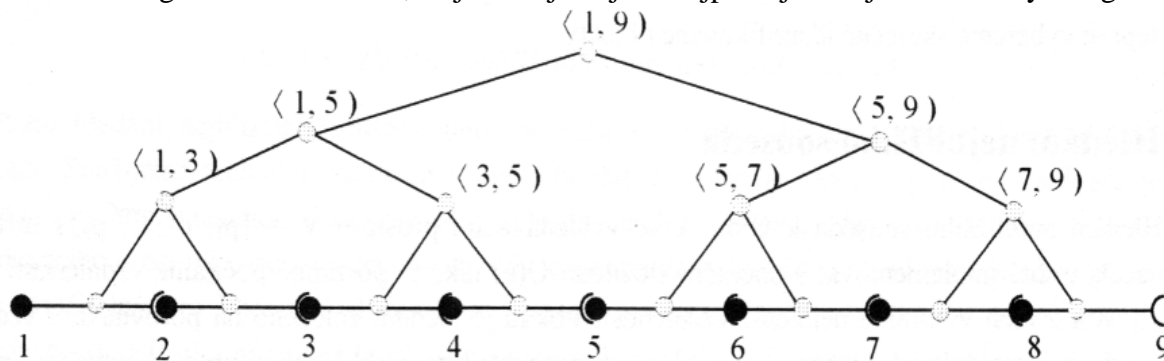
Prevažně v grafice se uplatňují dotazy „ve kterých intervalech se nachází bod  $P$ “ ?

Nechť  $S$  je množina intervalů  $\langle A_i, B_i \rangle$  (segmentů) osy  $x$ , intervaly nemusejí být disjunktní, segmentový strom nad  $S$  sestrojíme takto:

1. Seřadíme všechny levé i pravé koncové body  $A_i, B_i$
2. Označíme seřazenou posloupnost  $P = (x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ ,  $P$  dělí osu  $x$  na intervaly
3. Nad intervaly sestrojíme vyvážený BVS tak, že listy stromu budou jednotlivé intervaly, každému vnitřnímu uzlu  $u$  přiřadíme interval  $I_u$ , který vznikne sjednocením intervalů všech potomků  $u$
4. Uzel  $u$  ohodnotíme množinou všech intervalů z  $S$  takových, že
  - a) obsahují celý interval  $I_u$
  - b) neobsahují celý interval  $I$  otce uzlu  $u$



Ohodnocení uzlu lidskou řečí :-), „Uzel  $u$  je ohodnocen segmentem  $s_i$  pokud je v něm celý obsazen, ale zároveň otec uzlu  $u$  v segmentu  $s_i$  celý obsazen není. Např.  $I_2$  je celý v  $s_1$  a  $s_3$ . Je však ohodnocen pouze  $s_1$  protože jeho otec celý v  $s_1$  není. Nemůže být ohodnocen  $s_3$  protože otec je celý v  $s_3$  (ba dokonce jeho děd :-). To že je celý obsazen v segmentu  $s_i$  znamená, že jeho nejlevější a nejpravější list jsou intervaly v segmentu  $s_i$ .”



obr. 4.27 BVS nad normalizovanými intervaly

#### 5.4 Operační a paměťová složitost algoritmů vyhledávání

	$O(T_{avg}(n))$	$O(S(n))$
<b>Asociativní</b>		
sekvencní	$N$	$N$
bin. Pulení	$\log_2 n$	$N$
Interpolacní	$\log_2 \log_2 n$	$N$
<b>Adresní</b>		
Prima adresace	$1 = \text{konst.}$	$ U  = \text{cele universum} = \text{vsechny mozne klice}$
Zretezené rozptyl.	$n/2m = O(n)$	$n + m \cdot \text{velikost(ukazatele)}$
Otevřené rozptyl.	$1/\beta * \ln(1/(1-\beta))$	$m = \text{pokryje pouze } m \text{ klicu}$
Vicerozmerne	$O(T_{avg}(n,k))$	$O(S(n,k))$
<b>Uplná shoda</b>		
Sekvencní	$n, k$	$N$
Binární podle lexikal. Uspořádání	$k * \log_2 n$	$N$
<b>Částečnou shodu</b>		
Sekvencně	$n, q$ ( $q = \text{pocet zadanych klicu}$ )	$N$
<b>intervalovou shodu</b>		
Sekvencně	$n, q$ ( $q = \text{pocet zadanych intervalu}$ )	$N$
<b>nejbližšího souseda</b>		
Naivní řešení	$n$	
Projekce	$k + \log_2 n$	
Voroniov diagram	$\log_2 n$	$n^2$
<b>stromy</b>		
K-strom (D-strom)	$\log_2(n+1)$	???
KD-strom (DD-tree)	$k + \log_2 n$	???
K-IS intervalovy	$m + \log_2^k n$	$n * \log_2^{k-1} n$
Segmentový strom	$q + \log_2 n$ ( $q$ je počet nalezených řešení)	$n * \log_2 n$