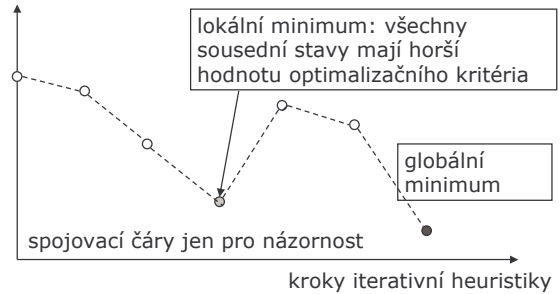


## Simulované ochlazování Simulated Annealing, SA

- princip, fyzikální analogie
- formulace algoritmu
- vlastnosti
- způsob použití
- vývoj
- příklad

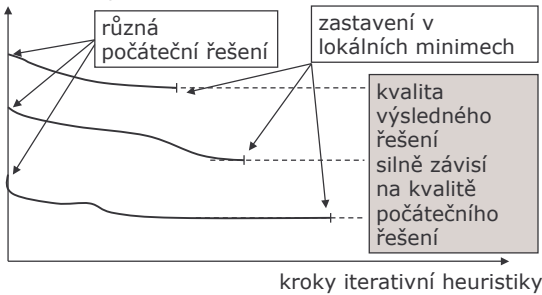
## Lokální minimum

hodnota optimalizačního kritéria



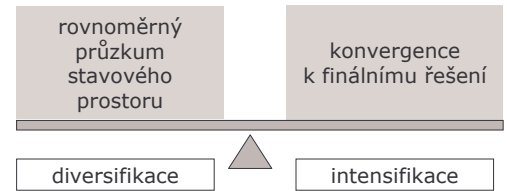
## Uvážnutí v lokálních minimech

hodnota optimalizačního kritéria



## Řízení úniku z lokálních minim

připustit tah, který vede k horšímu řešení



## Počátky analogie...

N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, E. Teller: Equation of state calculation by fast computing machines. J. of Chem. Phys, 21(1953), 1087-1091

S. Kirkpatrick, C. D. Gellat, M. P. Vecchi: Optimization by simulated annealing. Science, 220(1983), 671-680

V. Černý, A thermodynamical approach to the travelling salesman problem: an efficient simulation algorithm. J. of Optimization Theory and Applications, 45(1985), 41-55

## Tuhnutí taveniny

- vysoká teplota
- velká kinetická energie molekul
- kapalné skupenství

- opatrné chlazení
- velké krystaly
- nízká celková vazebná energie systému



- prudké chlazení
- malé krystaly
- vysoká celková vazebná energie systému

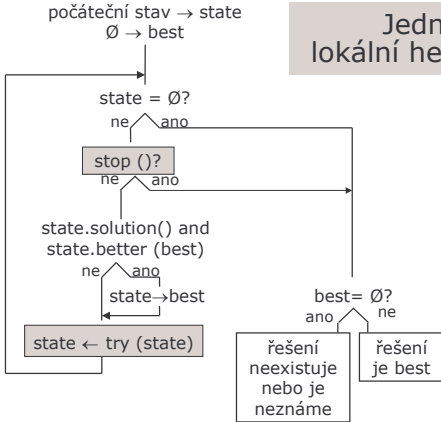
- nízká teplota
- vazebné síly převáží
- pevné skupenství
- krystalická stavba

# Analogie

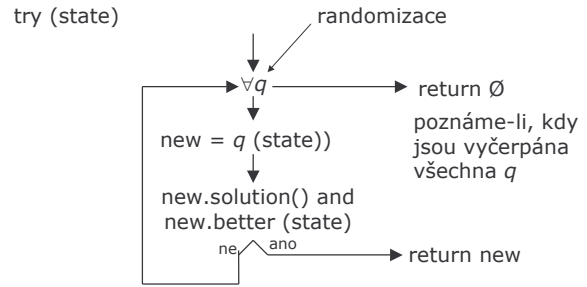
- stav systému → řešení
- změna stavu → přechod k sousednímu řešení
- energie systému → optimalizační kritérium
- krystalický stav → heuristické řešení
- kinetická energie molekul → ochota k přechodu do horšího stavu
- teplota → řídicí parametr

# Formulace simulovaného ochlazování

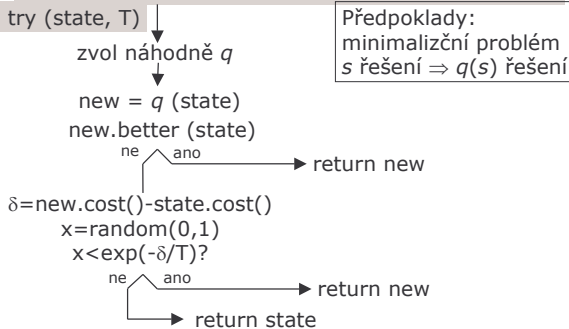
## Jednoduchá lokální heuristika



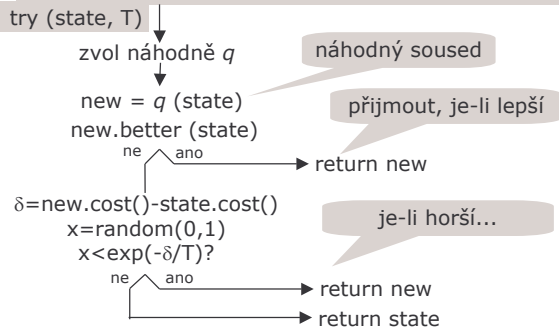
## Prohledávání okolí pro metodu první zlepšení



## Prohledávání okolí pro simulované ochlazování



## Prohledávání okolí pro simulované ochlazování



## Rozhodování v případě, že nový stav je horší

```

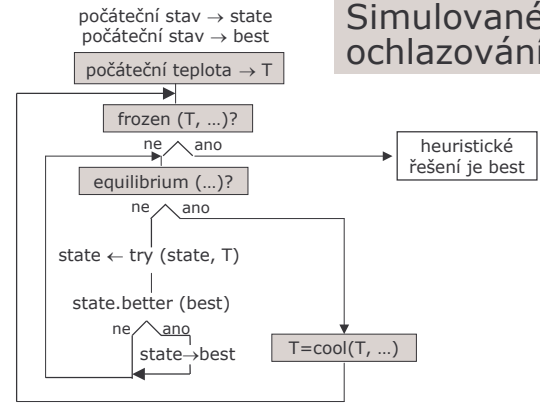
delta = new.cost() - state.cost()
x = random(0,1)
x < e^{-delta/T}?
    ano -> return new
    ne -> return state
    
```

rozíl opt. kritéria

pravděpodobnost  $p_{new}$

$\delta \rightarrow 0$	$p_{new} \rightarrow 1$	nepatrné zhoršení se přijme vždy
$\delta \rightarrow \infty$	$p_{new} \rightarrow 0$	velké zhoršení se přijme zřídka
$T \rightarrow 0$	$p_{new} \rightarrow 0$	při nízké teplotě se zhoršení přijmou s malou pravděpodobností
$T \rightarrow \infty$	$p_{new} \rightarrow 1$	při vysoké teplotě se přijmou i velká zhoršení

## Simulované ochlazování



## Vlastnosti simulovaného ochlazování

## Jak to funguje?

...děkuju, docela pěkně

- Počáteční stav
  - řešení z jiné (konstruktivní) heuristiky
  - náhodná řešení
- Vysoké teploty
  - velká pravděpodobnost přijetí horšího řešení
  - převaha diverzifikace
- Nízké teploty
  - konvergence k minimu
  - převaha intenzifikace

## Teoretická analýza (Hajek)

pro funkci cool() ve tvaru

$$t_k = \frac{c}{\log(1+k)}$$

$k$  ... číslo kroku  
 $c$  ... hloubka lokálního minima

kdo to má vědět?

proces po nekonečném počtu kroků skončí v globálním minimu (asymptotická konvergence)

## Způsob použití simulovaného ochlazování

## Co je třeba vymyslet...

počáteční teplota  
cool(T, ...)  
frozen(T, ...)  
equilibrium(...)

rozvrh ochlazování

předem daný nebo  
řízený zpětnou vazbou

stavový prostor (operace)  
optimalizační kritérium  
počáteční řešení

jako obvykle  
u lokálních  
iterativních heuristik

## Teplota je parametr...

$\delta = \text{new.cost}() - \text{state.cost}()$   
 $x = \text{random}(0, 1)$   
 $x < \exp(-\delta/T)?$

- změníme metodu cost() tak, aby cenu vracela v halších místo v korunách
- měli bychom dostat stejné výsledky
- k tomu také  $T$  musí být 100× větší

## Rozvrh ochlazování

cool(T) =  $aT$ ,  $0,8 < a < 0,999$

souvisí s ostatními  
parametry rozvrhu

equilibrium():

- pevný počet kroků  $N$
- $N$  přijatých nebo  $2N$  kroků
- ...

brání příliš  
pomalému chlazení  
při nízkých teplotách

souvisí s cool(T)

## Souvislost cool() a equilibrium()

Dáno:

Měníme:

počáteční teplota  $T_p$

délku ekvilibria  $N$

koncová teplota  $T_k$

celkový počet iterací  $s$

$T(x) \cong T_p \cdot a^{x/N}$

teplota v čase  $x$

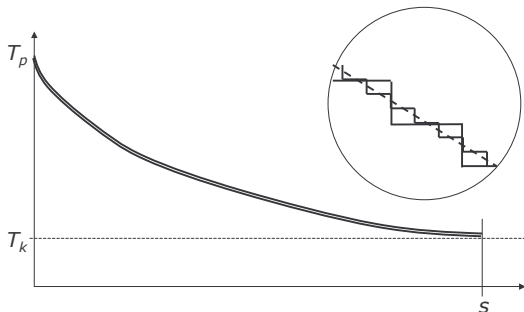
$T_k \cong T_p \cdot a^{s/N}$

koncová teplota

$$T(x) \cong T_p \left[ \frac{T_k}{T_p} \right]^{x/s}$$

nezávisle na  $N$

## Ochlazování při konstantních $T_k, T_p, s$



## Počáteční teplota

- Známe hloubku lokálních minim  $\Rightarrow$  nastavíme teplotu tak, aby pravděpodobnost úniku z minima byla např. 0,5
- Zpětnovazební řízení
  - rychle zvyšujeme teplotu
  - sledujeme četnost přijatých změn k horšímu
  - zaznamenáme teplotu pro pravděpodobnost např. 0,5
  - vrátíme původní stav a nastavíme teplotu

## frozen()

- Četnost změn (jakýchkoli) klesla pod nastavenou mez
- Pevná mez teploty

## Co je třeba vymyslet...

počáteční teplota  
cool(T, ...)  
frozen(T, ...)  
equilibrium(...)

rozvrh ochlazování

předem daný nebo řízený zpětnou vazbou

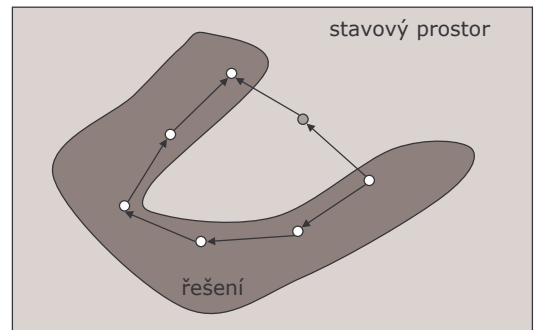
stavový prostor (operace)  
optimalizační kritérium  
počáteční řešení

jako obvykle u lokálních iterativních heuristik

## Technika relaxace

- Co když nemohu zabránit, aby  $q(s)$  převedla řešení na konfiguraci, kteřá řešením není?
- Obecný problém iterativních heuristik
- Relaxace
  - přírůžka k optimalizačnímu kritériu (pokud lze spočítat)
  - odhadnout vzdálenost od řešení a použít místo optimalizačního kritéria
- Jiná řešení
  - zahodit
  - opravit, např. některou z jednoduchých heuristik

## Relaxace a dosažitelnost



## Stavový prostor

- Randomizovaný algoritmus → statistické vlastnosti stavového prostoru
- Vzájemná dosažitelnost stavů, přibližně stejná
- Výpočet náhodného souseda a optimalizačního kritéria nejčastější operace, zjednodušit, i za cenu relaxace
- Hajekuv výsledek → vliv hloubky minim na činnost algoritmu → nepřidělat algoritmu práci zbytečně divokým optimalizačním kritériem

## Počáteční řešení

- Náhodná počáteční řešení
  - vícenásobné spuštění
  - měření iterativní síly
  - dobře aplikované simulované ochlazování není závislé na počátečním řešení - těžiště práce v iteracích
- Konstruktivní počáteční řešení
  - chytrá konstruktivní fáze - hluboké lokální minimum
  - alespoň nějaké minimum

## Vymysleli jsme...

počáteční teplota  
cool(T, ...)  
frozen(T, ...)  
equilibrium(...)

rozvrh ochlazování

předem daný nebo  
řízený zpětnou vazbou

stavový prostor (operace)  
optimalizační kritérium  
počáteční řešení

jako obvykle  
u lokálních  
iterativních heuristik

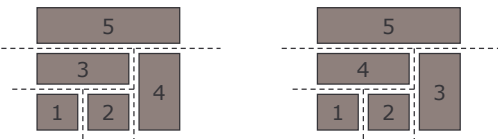
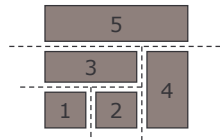
## Je to dobře? Vývoj SA heuristik

- Použitelnost v celém rozsahu zamýšlené aplikace bez ručních zásahů
- ⇒ dostatečný soubor zkušebních úloh, generátory
- hodnocení zkušebních úloh
- úloha vizualizace
  - podoba řešení
  - vývoj optimalizačního kritéria
- vývoj heuristiky a vývoj jejich adaptačních mechanismů

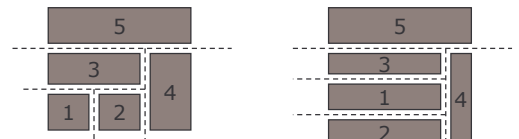
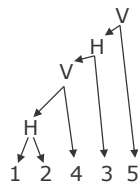
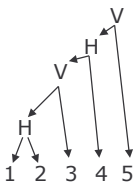
## Příklad použití

## Floorplanning

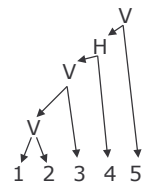
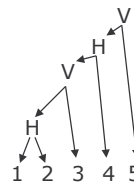
- Obdélníkové moduly se zadanou plochou, ale volitelným poměrem výška/šířka (v jistých mezích)
- Poskládat do obdélníka s minimální plochou
- Rozložení jednotek integrovaného obvodu
- Volíme omezení: tzv. řezové plány



M1

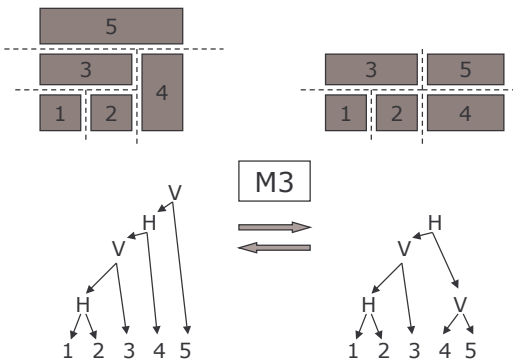


M2



## Stavový prostor

- Všechny stavy jsou vzájemně dosažitelné (každá operace je pro to nutná)
- Vzájemná dosažitelnost je stejná (každý tah má svou inverzi, mezi každým párem stavů je možno přejít oběma směry)



## Aplikace SA

- Počáteční teplota: pravděpodobnost přijetí průměrného zhoršení  $\delta$ :  $\rho_0 \rightarrow 1$
- Provést několik záměn, spočítat
- Ekvilibrium:  $T_0 = -\frac{\delta}{\ln \rho_0}$   
N zlepšení nebo  $2N$  kroků, kde  $N \approx n$
- $t_k = 0,85 t_{k-1}$
- Frozen: méně než 5% přijatých

## Alternativní rozvrhy ochlazování

- Žihání nefunguje!

## Kombinace a alternativy SA

- pravděpodobnostní fce (profiling)

## Paralelizace

- Ustálení při dané teplotě, různé nastavení generátoru pseudonáhodných čísel

- Více náhodných sousedů

zbytečné při vysokých teplotách

dublování při nízkých teplotách

↙ přepnout ↘

- Společná paměť, paralelní zápis mezivýsledků