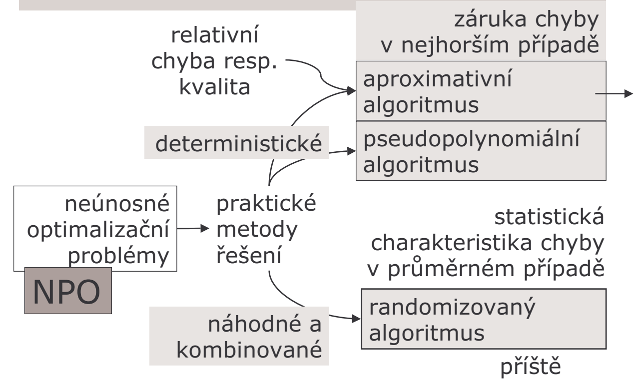
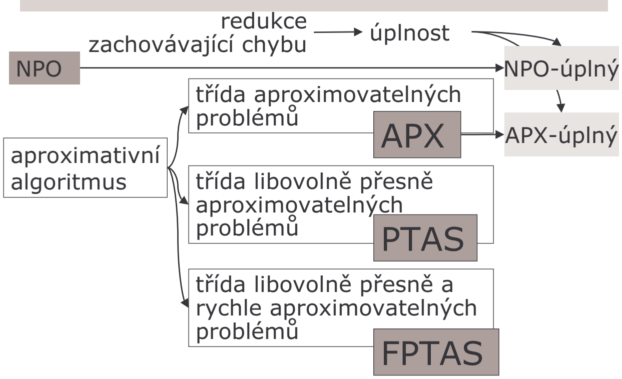
Aproximativní algoritmy

Aproximativní algoritmus



Třídy aproximovatelnosti

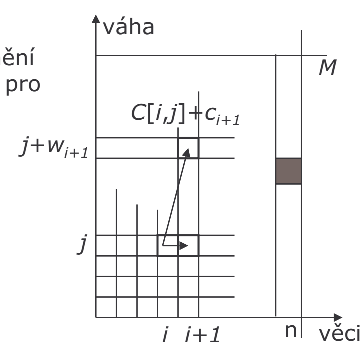


Pseudopolynomiální algoritmy

Pseudopolynomiální algoritmus pro problém batohu

C[*i*,*j*]:
cena optimálního plnění batohu s kapacitou *j* pro prvých *i* věcí

Výsledek:
maximální *C*[*n*,*j*]



Složitost

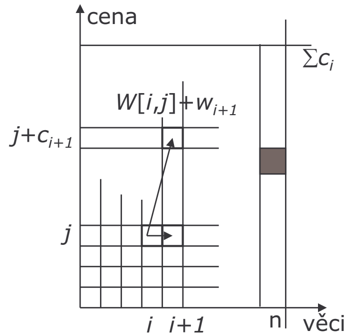
- Pole má *n*.*M* prvků
- Každý prvek lze vypočíst v konstantním čase
- Složitost *O*(*n*.*M*)

M nesouvisí s velikostí instance (měřené jakýmkoli rozumným způsobem)

Varianta

$W[i,j]$:
váha optimálního (nejlehčího) plnění batohu s cenou j pro prvých i věcí

Výsledek:
$W[n,j] \leq M$
s maximálním j



Složitost

- Velikost pole $n.\sum c_i$
- Každý prvek lze spočítat v konstantním čase
- Nechť $C_M = \max \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$.
- Pak $\sum c_i \leq n.C_M$
- Složitost $O(n^2.C_M)$

C_M nesouvisí s velikostí instance (měřené jakýmkoli rozumným způsobem)

Pseudopolynomiální algoritmus

- Definice:
  Algoritmus, jehož počet kroků závisí polynomiálně na velikosti instance, ale závisí dále na parametru, který s velikostí instance <u>nesouvisí</u>, nazýváme <u>pseudopolynomiálním.</u>

Aproximativní algoritmy, aproximovatelné problémy a jejich třídy

Aproximativní algoritmus pro problém batohu

Algoritmus APR-KNAP:
- Věci seřaďte podle klesajícího poměru cena/hmotnost
- V tomto pořadí vkládejte do batohu, pokud není překročena nosnost batohu
- Výsledné řešení porovnejte s řešením, které se skládá pouze z jediné, nejcennější věci

Výsledné řešení má cenu ≥50% optimálního řešení

Měření kvality

$C(S)$ hodnota opt. kritéria řešení S
APR(I) aprox. řešení instance I
OPT(I) optimální řešení instance I

Definice:
Algoritmus APR má <u>relativní kvalitu</u> R, jestliže

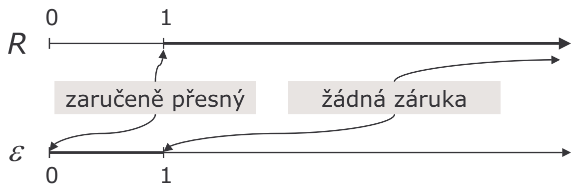
$$R \geq \max_{\forall I} \left\{ \frac{C(\mathrm{APR}(I))}{C(\mathrm{OPT}(I))}, \frac{C(\mathrm{OPT}(I))}{C(\mathrm{APR}(I))} \right\}$$

Algoritmus APR má <u>relativní chybu</u> R, jestliže

$$\varepsilon \geq \max_{\forall I} \left\{ \frac{|C(\mathrm{APR}(I)) - C(\mathrm{OPT}(I))|}{\max \{ C(\mathrm{OPT}(I)), C(\mathrm{APR}(I)) \}} \right\}$$

Vlastnosti

$$\boxed{\varepsilon = 1 - \frac{1}{R}}$$



Aproximativní algoritmus, třída APX

- Definice:
  Algoritmus APR pro problém Π je <u>R-aproximativní (ε-aproximativní)</u>, jestliže jeho relativní kvalita (relativní chyba) je $R(\varepsilon)$.
- Definice:
  Optimalizační problém Π je <u>R-aproximativní (ε-aproximativní)</u>, jestliže pro něj existuje R-aproximativní (ε-aproximativní) polynomiální algoritmus. Číslo R (ε) nazveme <u>aproximačním prahem</u> problému Π.
- Definice:
  Optimalizační problém Π <u>patří do třídy APX</u>, jestliže je R-aproximativní pro konečné R.

Příklad: algoritmus A$^+$

- Problém uzlového pokrytí: dán graf $G=(V,E)$; sestrojit $V' \subseteq V$ takovou, že $|V'| = \min$ a $\forall (u,v) \in E$, $u \in V'$ nebo $v \in V'$.
- Algoritmus:
  1. $V' = \emptyset$
  2. dokud $E \neq \emptyset$
     a. zvol hranu $(u,v) \in E$
     b. $V' = V' \cup \{u,v\}$
     c. odstraň z E hrany incidentní s u nebo v

Důkaz

- Algoritmus:
  1. $V' = \emptyset$
  2. dokud $E \neq \emptyset$
     a. zvol hranu $(u,v) \in E$
     b. $V' = V' \cup \{u,v\}$
     c. odstraň z E hrany incidentní s u nebo v

- podle konstrukce: V' reprezentuje $|V'|/2$ hran, které neincidují
- $\Rightarrow$ V'_{OPT} musí mít nejméně $|V'|/2$ uzlů
- $\Rightarrow$ $\varepsilon_{A+} \leq \dfrac{|V'| - |V'_{OPT}|}{|V'|} \leq ½$.
- na grafu o 1 hraně se toho dosáhne
- $\Rightarrow$ $\varepsilon_{A+} = ½$, $R_{A+} = 2$

A B

$V' = \{A,B\}$

$V'_{OPT} = \{A\}$

Příklad: A^{++}

- Algoritmus:
  1. $V' = \emptyset$
  2. dokud $E \neq \emptyset$
     a. zvol hranu $(u,v) \in E$ *tak,* že $\deg(u) + \deg(v) = \max$.
     b. $V' = V' \cup \{u,v\}$
     c. odstraň z E hrany incidentní s u nebo v

Analýza nejhoršího případu je stejná, ale průměrný čas je lepší.

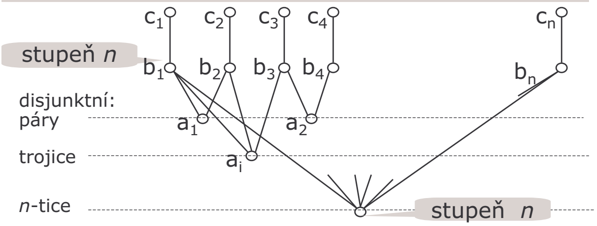
Příklad: B$^+$

- Algoritmus:
  1. $V' = \emptyset$
  2. dokud $E \neq \emptyset$
     a. zvol uzel $v \in V - V'$, tak, že $\deg(v) = \max$.
     b. $V' = V' \cup \{v\}$
     c. odstraň z E hrany incidentní s v

Protipříklad

předpokládáme horší případ

$V'_{OPT}=\{b_i\}$
$V'=\{a_i,c_i\}$



$|V'_{OPT}|=n \quad |V'|=\sum_{j=1}^{n}\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor \geq 1+ n.\ln n$

špatná zpráva: $R_{B+} > 1/n + \ln n$

není aproximativní

Zhodnocení B^+

špatná zpráva: $R_{B+} > 1/n + \ln n$

S rostoucím n roste chyba na předloženém protipříkladu nade všechny meze
⇒ nelze dát žádnou záruku
⇒ B^+ není aproximativní

dobrá zpráva (odjinud): $R_{B+} < 1 + \ln n$

Aproximační prahy

uzlové pokrytí	$\varepsilon_{VC} \leq 1/2$	
batoh	$\varepsilon_K > 0$	libovolně malé číslo
TSO	$\varepsilon_{TSO} = 1$	pokud P≠NP
ΔTSO (metrický)	$\varepsilon_{\Delta TSO} \leq 1/3$	
TSO geometrický	$\varepsilon_{gTSO} > 0$	libovolně malé číslo

PTAS
(Polynomial Time Approximation Scheme)

- Definice:
  Algoritmus APR, který pro každé $\varepsilon > 0$ vyřeší každou instanci problému Π s relativní chybou nejvýše ε v čase polynomiálním v $|I|$ nazýváme polynomiální aproximační schéma problému Π.
- Definice:
  Problém Π patří do třídy PTAS, jestliže pro Π existuje polynomiální aproximační schéma.

Polynomiální aproximační schéma pro problém batohu

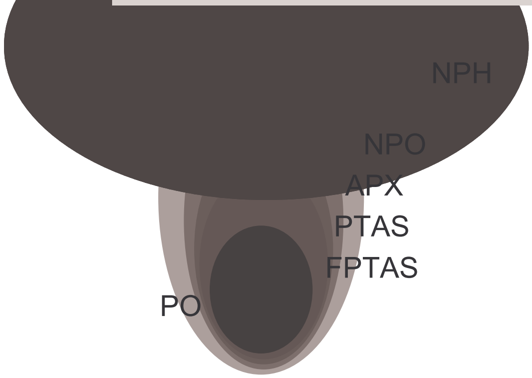
- Dáno: $0 < \varepsilon \leq 1$
- Algoritmus PTAS-KNAP:
  - nechť S je množina konfigurací batohu, které obsahují $\lceil 1/\varepsilon \rceil$ věcí nebo méně
  - každou konfiguraci z S doplnit algoritmem APR-KNAP
- Složitost:
  - $O(|I| \log |I|)$ ve velikosti instance
  - $O(2^{1/\varepsilon})$ v převrácené hodnotě relativní chyby

půjde to lépe?

FPTAS
(Fully Polynomial Time Approximation Scheme)

- Definice:
  Polynomiální aproximační schéma APR, jeho čas výpočtu závisí polynomiálně na $1/\varepsilon$, nazýváme plně polynomiální aproximační schéma.
- Definice:
  Problém Π patří do třídy FPTAS, jestliže pro Π existuje plně polynomiální aproximační schéma.

Struktura NPO



Plně polynomiální aproximační schéma pro problém batohu

- Instance: n, M, c_1, c_2, …, c_n, w_1, w_2, …, w_n.
- Nechť $C_M = \max\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$.
- Existuje pseudopolynomiální algoritmus se složitostí $O(n^2 C_M)$.
- Zanedbáme b nejméně významných bitů v cenách. hlavní fígl
- Složitost $O(\frac{n^2}{2^b} C_M)$. Relativní chyba $\varepsilon = \frac{n.2^b}{C_M}$
- Pro $0 < \varepsilon \leq 1$ volíme $b = \left\lceil \log \frac{\varepsilon C_M}{n} \right\rceil$
- Složitost $O(\frac{n^3}{\varepsilon}) \Rightarrow$ plně polynomiální aproximační schéma.
- Aproximativní algoritmus = přesný algoritmus nad zjednodušeným modelem

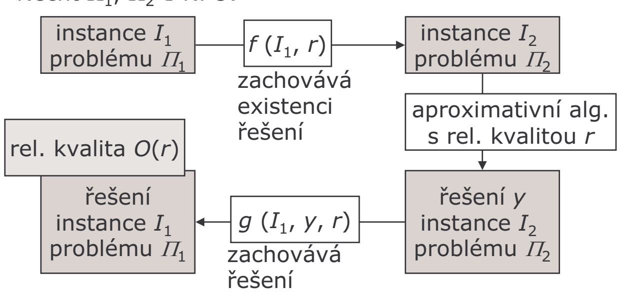
Aproximačně nejtěžší problémy

Úplnost

- Problém Π je X-těžký, jestliže se efektivní řešení všech problémů z třídy X dá zredukovat na efektivní řešení problému Π.
- Problém Π je X-úplný, jestliže je X-těžký a sám patří do třídy X.
- Efektivní řešení: zde: aproximovatelné řešení
- Redukce: zachovává efektivitu, zde: zachovává aproximaci

APX redukce $\quad \Pi_1 \overset{\text{APX}}{\propto} \Pi_2$

Nechť $\Pi_1, \Pi_2 \in$ NPO.



Vlastnosti

- $\Pi_1 \overset{\text{APX}}{\propto} \Pi_2$, $\Pi_2 \in \text{APX} \Rightarrow \Pi_1 \in \text{APX}$
- $\Pi_1 \overset{\text{APX}}{\propto} \Pi_2$, $\Pi_2 \in \text{PTAS} \Rightarrow \Pi_1 \in \text{PTAS}$

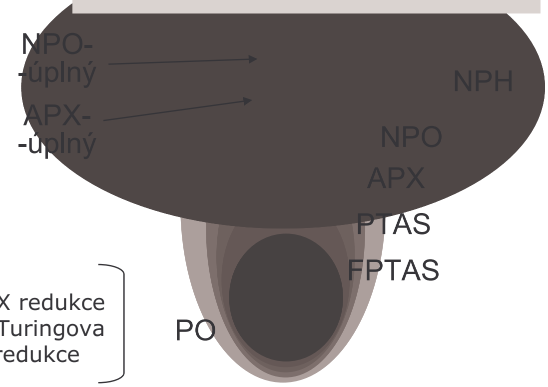
NPO-úplný, -těžký

- Problém Π je NPO-těžký, jestliže $\forall \Pi' \in$ NPO, $\Pi' \overset{APX}{\propto} \Pi$.
- Problém Π je NPO-úplný, jestliže je NPO-těžký a $\Pi \in$ NPO.

APX-úplný, -těžký

- Problém Π je APX-těžký, jestliže $\forall \Pi' \in$ APX, $\Pi' \overset{APX}{\propto} \Pi$.
- Problém Π je APX-úplný, jestliže je APX-těžký a $\Pi \in$ APX.

Struktura NPO



APX redukce je Turingova redukce

Problém pokrytí

- Dáno:
  kolekce *C* podmnožin konečné množiny *S*.
- Zkonstruovat:
  - podmnožinu $C' \subseteq C$ takovou, že každý prvek *S* patří do <u>alespoň</u> jedné podmnožiny z C', a dále $|C'|$ = min. (unátní pokrytí)
  - podmnožinu $C' \subseteq C$ takovou, že každý prvek *S* patří do <u>právě</u> jedné podmnožiny z C', a dále $|C'|$ = min. (binátní pokrytí)

Optimalizační SAT-folklór

		MAX WEIGHTED SAT	MAX SAT	MAX WEIGHTED SAT(!)
vstup	F, X	F, X, W	F, X	F, X, W
konfigurace	Y	Y	Y	Y
výstup	Y	Y	Y	Y
omezení	$F(Y) = 1$	$F(Y) = 1$	---	---
opt. kritérium	max. počet jedniček	max. vážený počet jedniček	max. počet splněných termů	max. vážený počet splněných termů

Dobré a špatné zprávy

Problém	Dobré (*R*)	Špatné
Min. uzlové pokrytí	2-log log |V| / 2log|V| 1985	APX-úplný 1991
Min. (unátní) pokrytí množiny S	1+ln |S| 1974	Není v APX 1993
MAX SAT (počet klauzulí)	1.2987 1997	APX-úplný 1991
MAX WEIGHTED SAT (váha proměnných v 1)		NPO-úplný
Batoh	FPTAS 1975	

Dobré a špatné zprávy

Problém	Dobré	Špatné
TSO		NPO-úplný 1987
ΔTSO	*R*=1.5 1976 Christofides	APX-úplný 1993
Geom. TSO souřadnice $\in \mathbf{Z}$	PTAS 1996	
Geom. TSO souřadnice $\in \mathbf{Q}$		APX-úplný 1997