Kombinatorické problémy a algoritmy

Kombinatorická matematika

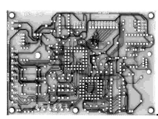
- zajímá se o konečné a diskrétní problémy
- konečný počet proměnných
- konečný počet hodnot pro každou proměnnou
- tudíž hrubá síla vždy funguje:
  - vyzkoušet všechny kombinace hodnot všech proměnných
  - poskytne výsledek v konečném čase, tudíž
  - je to algoritmus
- … ale většinou není prakticky použitelná

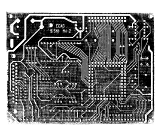
Problém a instance

problém

Nalézt optimální (nejkratší) cestu pro NC vrtačku na dané desce, která začíná a končí v předepsané klidové pozici.

instance





Kombinatorický problém

Charakterizován:

- vstupními proměnnými
- výstupními proměnnými
- konfiguračními proměnnými
- omezením
- optimalizačním kritériem, pokud je třeba

Konfigurační proměnné – to, co nastavuje hrubá síla

Proměnných je konečný počet a mají konečné domény

Příklad

vstupní proměnné — seznam děr
výstupní proměnné — pořadí děr
konfigurační proměnné — pořadí děr
omezením —
- uzavřená cesta
- každá díra právě jednou

optimalizační kritérium — nejkratší

Instance a řešení problému

instance problému	ohodnocení vstupních proměnných
konfigurace	ohodnocení konfiguračních proměnných
řešení instance	konfigurace, která splňuje omezení
optimální řešení	řešení s nejlepší hodnotou optimalizačního kritéria
suboptimální řešení	řešení s vyhovující hodnotou optimalizačního kritéria

při řešení nějaké instance

čemu?

Problém batohu

Jsou dána přirozená čísla n, M, $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$, $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$. Nalezněte čísla $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ z množiny {0,1} tak, aby

$$\sum_{i=1}^{n} x_i w_i \le M \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i c_i = \max$$

Je dáno n věcí, i-tá věc má váhu w_i a cenu c_i, dále batoh s nosností M. Nalezněte takovou sestavu věcí v batohu, aby nebyl přetížen a cena věcí byla maximální.

Problém batohu

Vstupní proměnné: $n, M, W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$

Konfigurační proměnné: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_i \in \{0, 1\}$

Výstupní proměnné: tytéž

Omezení: $\sum_{i=1}^{n} x_i w_i \le M$

Optimalizační kritérium: $\sum_{i=1}^{n} x_i c_i = \max.$

Instance a konfigurace

instance $n = 3$, $M = 6$, $C = \{10, 20, 30\}$, $W = \{2, 3, 5\}$

všechny konfigurace

x_1	x_2	x_3	$\Sigma x_i c_i$	$\Sigma x_i w_i$		
0	0	0	0	0	✓	triviální
0	0	1	30	5	✓	✔
0	1	0	20	3	✓	
0	1	1	50	8	⊘	
1	0	0	10	2	✓	
1	0	1	40	7	⊘	
1	1	0	30	5	✓	✔
1	1	1	60	10	⊘	

řešení ✓

optimální řešení ✔

Typy kombinatorických problémů

Nechť I je instance, Y konfigurace, $R(I, Y)$ omezení (tj. $R(I, Y)$ říká, zda Y je řešením)

- rozhodovací problém
  Existuje Y takové, že $R(I, Y)$?
- konstruktivní problém
  Sestrojit nějaké Y takové, že $R(I, Y)$.
- enumerační problém
  Sestrojit všechna Y taková, že $R(I, Y)$.

inženýrské úlohy vždy něco optimalizují!?

Optimalizační problémy

Nechť I je instance, Y konfigurace, $R(I, Y)$ omezení a $C(Y)$ optimalizační kritérium (cenová funkce)

- optimalizační rozhodovací problém
  Existuje Y takové, že $R(I, Y)$ a $C(Y)$ je lepší než daná konstanta Q?
- optimalizační konstruktivní problém
  Sestrojit nějaké Y takové, že $R(I, Y)$ a $C(Y)$ je nejlepší možné.
- optimalizační enumerační problém
  Sestrojit všechna Y taková, že $R(I, Y)$ a $C(Y)$ je nejlepší možné.
- optimalizační evaluační problém
  Zjistit nejlepší možné $C(Y)$ takové, že $R(I, Y)$.

Problém splnitelnosti booleovské formule (SAT)

Dáno:

n proměnných $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$

Booleovská formule $F(X)$ v konjunktivní normální formě (součin součtů), např.

$$F(X) = (x_1 + x_2' + x_3)(x_1' + x_2)(x_1' + x_3')$$

Nalézt:

Je tato formule splnitelná?

Tj. existuje ohodnocení $Y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ proměnných $x_1, x_2, \ldots x_n$ takové, že $F(Y) = 1$?

splnitelnost = satisfiability, odtud zkratka SAT

Verze SAT

Rozhodovací verze
- Existuje ohodnocení *Y* takové, že *F*(*Y*)=1?

Konstruktivní verze
- Sestrojit ohodnocení *Y* takové, že *F*(*Y*)=1

Enumerační verze
- Sestrojit všechna ohodnocení *Y* taková, že *F*(*Y*)=1

Optimalizační SAT

Optimalizační rozhodovací verze
- Existuje ohodnocení *Y* takové, že *F*(*Y*)=1 a *Y* má méně než *Q* jedniček?

Konstruktivní verze
- Sestrojit ohodnocení *Y* takové, že *F*(*Y*)=1 a *Y* má co nejméně jedniček.

Enumerační verze
- Sestrojit všechna ohodnocení *Y* taková, že *F*(*Y*)=1 a *Y* má co nejméně jedniček.

Verze SAT - shrnutí

	rozh.	konstr.	enum.	opt. rozh.	opt. konstr.	opt. enum.
vstup	*F, X*	*F, X*	*F, X*	*F, X*	*F, X*	*F, X*
konfigu-race	*Y*	*Y*	*Y*	*Y*	*Y*	*Y*
výstup	ano-ne	*Y*	{*Y*}	ano-ne	*Y*	{*Y*}
omezení	*F*(*Y*) =1	*F*(*Y*) =1	*F*(*Y*) =1	*F*(*Y*) =1	*F*(*Y*) =1	*F*(*Y*) =1
opt. kritérium				min.počet jedniček	min.počet jedniček	min.počet jedniček

SAT „folklór“

		maxSAT	
vstup	*F, X*	*F, X*	*F, X , W*
konfigu-race	*Y*	*Y*	*Y*
výstup	*Y*	*Y*	*Y*
omezení	*F*(*Y*) =1	---	---
opt. kritérium	min. počet jedniček	max. počet splněných termů	max. vážený počet splněných termů

Vztah verzí problémů

- Inženýrská praxe – často optimalizační problémy
- Teoretická odvození – rozhodovací problémy (jednoduchý výstup)
- Mají na to matematici právo?
- Optimalizační problém neúnosně složitý ⇔ rozhodovací verze neúnosně složitá
- Proč …
- Co je to neúnosně …