TEORIE GRAFŮ

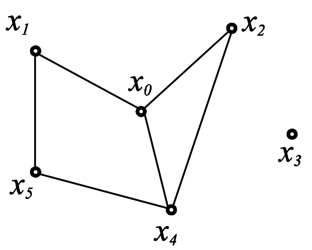
Přednášející: RNDr. Jiří Taufer, CSc.
Fakulta dopravní ČVUT v Praze, letní semestr 1998/99
Zpracoval: Radim Perkner, tamtéž, v květnu 1999

ZÁKLADNÍ POJMY

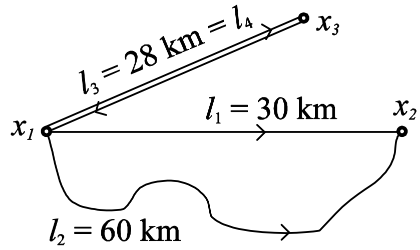
Def
Říkáme, že je dán *prostý graf*, jestliže je dána:
1) Množina X (uzlů, vrcholů); $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Nechť $P(X)$ je množina všech podmnožin množiny X.
2) Zobrazení $\Gamma : X \rightarrow P(X)$, tj. množina hran $U = \{h_1, h_2, ..., h_n\}$.
Označení: $G = (X, U)$, $G = (X, \vec{U})$ - viz dále.

Orientovaná hrana - uspořádaná dvojice uzlů (x_0, x_1), kde x_0 je počáteční uzel a $x_1 \in \Gamma(x_0)$ je koncový uzel. $\vec{U}$ je množina orientovaných hran.
Neorientovaná hrana - neuspořádaná dvojice uzlů (x_0, x_1). U je množina neorientovaných hran.

Funkce Γ tedy přiřazuje každému uzlu z grafu G množinu uzlů z G, se kterými je tento uzel spojen hranami. Množina všech orientovaných hran grafu G je $\vec{U}$.
např. Obr. 1: $x_0 \in X$, $\Gamma(x_0) = \{x_1, x_2, x_4\}$



Obr. 1



Obr. 2

V prostém grafu je mezi dvěma uzly maximálně 1 hrana (orientovaná nebo neorientovaná.)

Def
Multigraf - jedné dvojici uzlů je možno přiřadit víc hran (orientovaných nebo neorientovaných) - narozdíl od prostého grafu.
Neorientovaný graf - $G = (X, \Gamma) = (X,U)$.
Orientovaný graf - $G = (X, \Gamma) = (X,\vec{U})$. Hrany jsou orientované; každé je přiřazena určitá orientace (směr).
Ohodnocený graf (orientovaný, příp. neorientovaný) - $G = (X, \vec{U}, \varphi)$, kde φ je reálná funkce definovaná na U a přiřazující každé hraně nějakou hodnotu (např. vzdálenost, doba jízdy, ...).
Úplný graf -graf bez smyček (tj. hran, jejichž oba koncové uzly jsou shodné), ve kterém jsou každé dva uzly spojeny hranou
Rovinný graf - uzly grafu jsou body roviny a hrany lze reprezentovat spojitými orientovanými křivkami, ležícími v rovině, přičemž mají společné body pouze v koncových bodech. Koncové body křivek jsou uzly grafu.
Graf, který není rovinný nazýváme *prostorový graf* .

Pozn. Na obr. 2 je tedy orientovaný ohodnocený rovinný úplný multigraf.

Def

Graf $G_1=(X_1,U_1)$ je *podgrafem* grafu $G = (X,U)$ tehdy, jestliže je to graf a obsahuje některé jeho uzly a hrany.

$X_1 \subset X \wedge U_1 \subset U \Leftrightarrow G_1 \subset G$ tj. $(X_1,U_1) \subset (X,U)$

Def

Orientovaný sled - z jednoho uzlu (a) do jiného (b) je taková posloupnost uzlů $\{u_0, u_1, ..., u_n\}$ orientovaného grafu, kde $u_0 = a$, $u_n = b$ a $h_1 = (a, u_1)$, $h_i = (u_{i-1}, u_i)$ pro $i = 2, 3, ..., n$-1, $h_n = (u_{n-1}, b)$ jsou orientované hrany grafu.

Dráha - orientovaný sled, ve kterém se žádný uzel nevyskytuje dvakrát.

Neorientovaný sled - z jednoho uzlu (a) do jiného (b) je taková posloupnost vrcholů $\{u_0, u_1, ..., u_n\}$ neorientovaného grafu, kde $u_0 = a$, $u_n = b$ a $h_1 = (a, u_1)$, $h_i = (u_{i-1}, u_i)$ pro $i = 2, 3, ..., n$-1, $h_n = (u_{n-1}, b)$ jsou hrany grafu.

Cesta- neorientovaný sled, ve kterém se žádný uzel nevyskytuje dvakrát.

Tah orientovaný (neorientovaný) - orientovaný (neorientovaný) sled, ve kterém se žádná hrana dvakrát neopakuje.

Silná souvislost grafu - z každého uzlu orientovaného grafu se lze dostat po orientovaných drahách do jakéhokoliv jiného uzlu.

Slabá souvislost grafu - z každého uzlu neorientovaného grafu se lze dostat po cestách do jakéhokoliv jiného uzlu.

Komponenty grafu - největší slabě souvislé podgrafy tohoto grafu (např. graf G na obr. 1 má dvě komponenty G' a G'': $X' = \{x_0, x_1, x_2, x_4, x_5\}$ a $X'' = \{x_3\}$.)

GRAFY A MATICE

Říkáme, že matice **A** je *rozpadlá (reducibilní)*, jestliže lze přečíslovat rovnice a neznámé tak, že soustava rovnic $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{f}}$ má tvar:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{u}} \\ \hline \vec{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{f}} \\ \hline \vec{\mathbf{g}} \end{bmatrix},$$

kde **M**, **P** jsou čtvercové matice, **O** je nulová matice.

Potom platí $\mathbf{P}\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{g}}$, $\mathbf{M}\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{f}} - \mathbf{N}\vec{\mathbf{v}}$ a tedy řešení původní soustavy je převedeno na posloupnost řešení dvou soustav menšího řádu.

Jestliže takové přerovnání rovnic a přečíslování neznámých není možné, říkáme že matice je *nerozpadlá (irreducibilní)*.

Věta

Nechť **A** je typu (n,n). Přiřadíme matici **A** graf $G = (X,\vec{U})$ takto:

1) G má n uzlů $(u_1, u_2, ..., u_n) = X$.

2) $\vec{U}$ definujeme takto: $(u_i, u_j) \in \vec{U} \Leftrightarrow a_{ij} \neq 0$, kde a_{ij} je prvek matice **A**.

Matice je irreducibilní právě tehdy, jestliže graf G je silně souvislý.

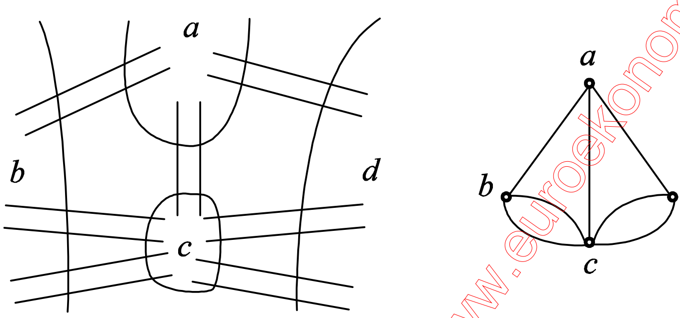
EULERŮV TAH

Def
Stupeň uzlu v orientovaném grafu: $d(x^+)$ ... počet hran vystupujících z uzlu *x*; $d(x^-)$ ... počet hran vstupujících do uzlu *x*.
Stupeň uzlu v neorientovaném grafu: $d(x)$ ... počet hran vystupujících (= vstupujících) z uzlu *x*.
Pravidelný graf - všechny uzly grafu jsou stejného stupně.

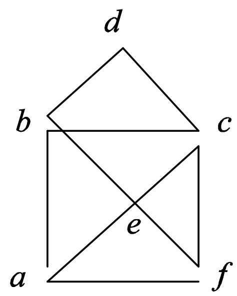
Def
Eulerův tah -tah, který prochází všemi hranami grafu (právě jednou).
- *otevřený* - končí v jiném uzlu, než ve kterém začal.
- *uzavřený* - končí v uzlu, ve kterém začal.

Lze-li provést Eulerův tah, pak se jedná o *Eulerův graf*.

3 věty (platné pro souvislý graf)
1) V grafu jsou více než 2 uzly lichého stupně ... Eulerův tah neexistuje.
2) V grafu jsou právě 2 uzly lichého stupně ... Eulerův tah existuje, je otevřený. (Začíná v prvním (druhém) uzlu lichého stupně a končí v druhém (prvním) uzlu lichého stupně.)
3) V grafu jsou všechny uzly sudého stupně ... Eulerův tah existuje, je uzavřený. (Začíná a končí v libovolném uzlu grafu.)



Obr. 3 - Sedm mostů v městě Královci



Obr. 4 - Domeček

Sedm mostů v městě Královci
Ve městě Královci jsou na řece Pregel dva ostrovy, které jsou se zbytkem města spojeny sedmi mosty jako na obr. 3 vlevo. Lze si udělat procházku, při které bychom prošli po každém mostě právě jednou?
Nelze. V grafu jsou všechny čtyři uzly lichého stupně (obr. 3 vpravo), takže podle věty *1)* Eulerův tah neexistuje.

Domeček
Lze nakreslit jedním tahem domeček?
Ano, domeček jedním tahem nakreslit lze (např. obr. 4), protože obsahuje právě dva uzly lichého stupně (*a* a *f*). Podle věty *2)* tedy existuje otevřený Eulerův tah. Lze najít mnoho způsobů, jak domeček nakreslit, ale pokaždé bude tah začínat a končit v uzlech *a* a *f*.

STROM A KOSTRA GRAFU

Def
Nechť
$G = (X,U)$ ... neorientovaný multigraf,

$|X| = n$ ... počet uzlů,
$|U| = m$ ... počet hran,
k ... počet komponent grafu G.
Potom číslo $\mu(G) = m - n + k$ se nazývá *cyklomatické číslo grafu*.
Číslo $\mu(G)$ vyjadřuje počet nezávislých kružnic v grafu a např. v elektrotechnice je to minimální počet lineárně nezávislých rovnic při použití 2. Kirchhoffova zákona.

Def
Vytvoříme matici **A** tak, že v zadaném grafu G hledáme všechny uzavřené kružnice. V matici **A** má každá hrana svůj sloupec. Každé kružnici přísluší jeden řádek matice **A** tak, že jednotlivé prvky tohoto řádku udávají, kolikrát daná kružnice prošla zvoleným směrem dané hrany (pokud kružnice prochází opačným směrem než zvoleným, počítáme tento průchod záporně.)
Hodnost takto vytvořené matice **A** je *cyklomatické číslo grafu* $\mu(G)$ a její lineárně nezávislé vektory určují *nezávislé kružnice* grafu G.
Strom - souvislý graf, který neobsahuje žádnou kružnici.

Věta
Strom má tyto ekvivalentní vlastnosti:
1) G je souvislý, $\mu(G) = 0$.
2) $\mu(G) = 0$, $m = n - 1$
3) G je souvislý a má $n - 1$ hran.
4) $\mu(G) = 0$ a je-li hrana $h \notin U$, potom graf $G_1 = (X, U_1)$, kde $U_1 = U \cup \{h\}$, má $\mu(G_1) = 1$.
5) Nechť G je souvislý a $h \in U$, potom graf $G_1 = (X, U_1)$, kde $U_1 = U - \{h\}$, je graf nesouvislý.

Def
Kostra grafu - podgraf, který je stromem.
Minimální kostra grafu - taková kostra G' ohodnoceného grafu $G = (X,U,\varphi)$, že
$\sum_{h \in G'} \varphi(h)$ je minimální ze všech existujících koster grafu G.

HLEDÁNÍ MINIMÁLNÍ KOSTRY GRAFU

Níže popsané metody vycházejí z předpokladu, že zkoumaný graf je prostý, ohodnocený a souvislý. Pokud prostý není, tak pro každé dva uzly nalezneme nejkratší hranu, která je spojuje, a ostatní hrany, které tyto dva uzly spojují, z grafu odstraníme.

Borůvkova metoda :
algoritmus:
1. V libovolné kružnici v grafu škrtněte nejdelší hranu.
2. Opakujte krok 1. tak dlouho, dokud lze v grafu nějakou kružnici najít.

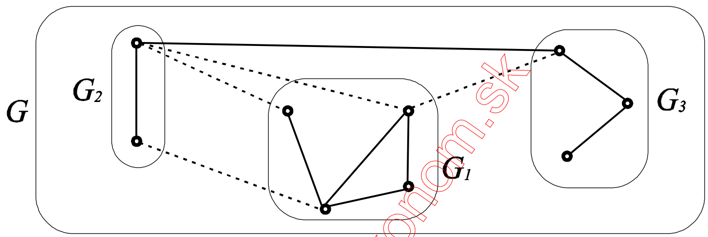
Z grafu zbyla jeho minimální kostra.

Věta
Nechť K je kružnice v grafu U a nechť h_1 je nejdelší hrana na kružnici K, tj.
$\forall h \in K$: $\varphi(h_1) \geq \varphi(h)$.
Potom existuje minimální kostra, která neobsahuje hranu h_1.

Pozn. Kdyby byla nerovnost ostrá, potom *žádná* minimální kostra neobsahuje hranu h_1. Neostrá nerovnost je zde pro případ, že by na kružnici bylo víc hran se stejným nejmenším φ . Potom by bylo více různých minimálních koster grafu.

Věta
H_0 je množina všech hran, které leží aspoň na jedné kružnici. Nechť
$\forall h \in H_0 - \{h_1\}: \varphi(h_1) \leq \varphi(h)$.
Potom existuje minimální kostra, která obsahuje hranu h_1.
Pozn. Kdyby byla nerovnost ostrá, potom *každá* minimální kostra obsahuje hranu h_1.

Věta
Nechť $G = (X,U,\varphi)$. Nechť $G_i = (X_i,U_i,\varphi_i)$, jsou disjunktní podgrafy grafu G (tj. žádné dva grafy G_i nemají společnou ani jednu hranu ani uzel.)
Nechť A_i je množina takových hran, které jsou incidentní s X_i pouze jedním uzlem a jejich druhý uzel leží v jiné množině než X_i.
Potom každá minimální hrana z A_i leží na minimální kostře grafu G.



Obr. 5

Pozn. Pro graf na obr. 5 jsou tedy v množině A_1 právě čárkované hrany.

Jarníkova metoda
algoritmus:
1. Vyberte libovolný uzel $x_1 \in X$ a dejte ho do množiny F.
2. Vyberte nejkratší hranu vedoucí z uzlů v množině F do ostatních uzlů (tj. X-F) a příslušný koncový bod dejte do F. Vybraná hrana je již hrana kostry.
3. Opakujte od kroku 2, dokud nejsou všechny uzly grafu v množině F.

Hrany, které jsme vybrali v bodě 2 potom tvoří minimální kostru grafu.

Dijkstrova metoda hledání minimální kostry
množiny hran:
1 - Obsahuje hrany, které jsou již vybrány.
2 - Hrany, z nichž právě jedna bude v příštím kroku přidána do mn. *1*.
3 - Ostatní hrany.
množiny uzlů:
A - Uzly příslušné k hranám z mn. *1*.
B - Ostatní uzly.
algoritmus:
1. krok: Libovolný uzel x_1 dejte do mn. *A*. Všechny hrany s ním incidentní do mn. *2*.
2. krok: Vyberte z mn. *2* nejkratší hranu a přidejte ji do *1*. Její druhý uzel (x_i) dejte do mn. *A* (první už tam je.)

3. krok: Nechť x_i je uzel, který byl naposledy přidán do mn. *A*. Nechť *H* je množina hran, jejichž jeden uzel je x_i a druhý je v mn. *B*. Do množiny *2* potom přidejte ty hrany z *H*, které buď nejsou incidentní s hranami z mn. *2*, anebo s nimi incidentní jsou, ale jsou kratší. Pokud jsou kratší, přesuňte ty delší z mn. *2* do mn. *3*. Opakujte od kroku 2, dokud nejsou všechny uzly v mn. *A*. Hrany v mn. *1* tvoří potom kostru grafu.
Pozn. V mn. $1 \cup 2$ se nevyskytuje kružnice.

HLEDÁNÍ MINIMÁLNÍ DRÁHY V GRAFU

Def
Minimální dráha z uzlu *a* do uzlu *b* je taková dráha H, pro kterou $\sum_{h \in H} \varphi(h)$ je minimální.

Dijkstrova metoda hledání minimální dráhy
Tato metoda je určena pro orientovaný graf. Pro graf neorientovaný stačí každou jeho hranu převést na dvě opačně orientované.

množiny hran:
1 - Obsahuje hrany, které jsou již vybrány.
2 - Hrany, z nichž právě jedna bude v příštím kroku přidána do mn. *1*.
3 - Ostatní hrany.
množiny uzlů:
A - Uzly příslušné k hranám z mn. *1*. (Pro každý uzel z mn. *A* registrujeme jeho minimální doposud známou vzdálenost od startu *a*.)
B - Uzly příslušné k hranám z mn. *2*.
C - Ostatní uzly.
algoritmus pro nalezení minimální dráhy ze *startu* do *cíle* :
1. krok: Start dejte do mn. *A*. Všechny hrany vycházející ze *startu* dejte do mn. *2* a koncové uzly těchto hran dejte do *B*.
- Proveď následují krok tolikrát, až v *A* bude *cíl:*
2. krok: Každý uzel z *B* je incidentní s právě jednou hranou z *2*, jejíž počáteční uzel je v množině A. Tím je definovaná jistá dráha ze startu do každého uzlu v B. Uzel x_i z *B*, do kterého jde nejkratší taková dráha ze *startu* odstraníme z *B* a přidáme do *A*. Odpovídající hranu z *2* odstraníme a přidáme ji do mn. *1*.Všechny orientované hrany, které vycházejí z x_i a jejichž koncové uzly leží v *C* odstraníme z mn. *3* a přidáme do množiny *2*. Koncové uzly těchto hran přidáme k množině *B*.Nyní uvažujme všechny orientované hrany *h*, které vycházejí z x_i a jejichž koncové uzly leží v *B*, a zkoumáme, zda-li užitím některé hrany *h* nezkrátíme již známou dráhu ze startu do uzlů v *B*. Je-li tomu tak, pak hranu *h* odstraníme z mn. *3* a přidáme k množině 2 a odpovídající hranu odstraníme z množiny dva a přidáme do množiny *3*.

Využití matic při hledání minimální dráhy v grafu
Def
Matice sousednosti $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (x_i,x_j) \in \vec{U}$, $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow (x_i,x_j) \notin \vec{U}$.

Věta
Nechť *G* je orientovaný graf a **A** je jeho matice sousednosti. Nechť $\{ p_{ij} \} = \mathbf{A}^k$.
Potom p_{ij} je počet různých drah délky *k* jdoucích z *i*-tého do *j*-tého uzlu.
důk. Indukcí podle *k*:
I. $k = 1$ ... platí z definice matice sousednosti

II. $\{p_{ij}\} = \mathbf{A}^{k-1}$, $p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} q_{il}\, p_{lj}$ ... C.B.D (= tím je to dokázáno)

Def
Matice ohodnocení $\mathbf{A}\{\varphi_{\mathrm{ij}}\}$: $\varphi_{\mathrm{ij}} = \varphi((x_i,x_j))$.

Věta
Nechť G je orientovaný graf a $\mathbf{A}$ je jeho matice ohodnocení. Nechť $\{ p_{ij} \} = \mathbf{A}^{\mathrm{k}}$.
Potom p_{ij} je délka miniální dráhy jdoucí z i-tého do j-tého uzlu.
důk. Indukcí podle k.

TOKY V SÍTÍCH

Tok v síti je např. proud v elektrickém obvodu, zboží v železniční síti, voda v potrbní síti ap.

Def
Síť $S = (G, z, s, c)$, kde G je orientovaný graf, z je zdroj, s je spotřebič, c je kapacita (propustnost hrany) defiovaná na množině hran $h \in \vec{U}$.

Def
Tok $t(h)$ je funkce defiovaná na množině hran $h \in \vec{U}$. Platí:
1) $0 \le t(h) \le c(h)$ (... Tok je nezáporný a menší nebo roven kapacitě hrany.)
2) $\sum_{u} t(u,v) = \sum_{w} t(u,w)$; $(u,v) \in U$, $(u,w) \in U$ (... Součet toků, které vcházejí do uzlu, z něj také vychází - platí pro všechny uzly v síti, kromě zdroje a spotřebiče.)

Def
Velikost toku $|t| = \sum_{u} t(z,u)$, $(z,u) \in U$. (... Celková velikost toku je rovna součtu všech toků na hranách vedoucích ze zdroje do uzlů, které se zdrojem sousedí.)

Věta
$|t| = \sum_{w} t(w,s)$, $(w,s) \in U$. (... Celková velikost toku je rovna součtu všech toků na hranách vedoucích do spotřebiče z uzlů, které se spotřebičem sousedí.)

Hledání maximálního toku v síti
Ford - Fulkersonův algoritmus:
1. krok (Inicializační): $\forall\, h \in G$: $t(h) = 0$
2. krok (Nalezení zlepšující cesty): Hledejte posloupnost vrcholů v_i pro $i = 1, 2, ..., k$ takovou, že buď $(v_i,v_{i+1}) \in \vec{U}$, $t(v_i,v_{i+1}) < \mathrm{c}(v_i,v_{i+1})$, nebo $(v_i,v_{i-1}) \in \vec{U}$, $t(v_i,v_{i-1}) > 0$ pro $(v_i,v_{i-1}) \in \vec{U}$. Pokud žádnou takovou zlepšující cestu nelze najít, jděte na *krok 5*.
3. krok (Určení přírůstku toku): Pro $i = 1, 2, ..., k$ je přírůstek toku
$d_i = (c(v_{i-1},v_i) - c(v_i,v_{i-1})) + t(v_i,v_{i-1})$. Přírůstek toku pro vybranou cestu je $d = \min\{d_i\}$ (nejmenší přírůstek přidělený v tomto kroku této cestě.)
4. krok: $d'_i = \min\{d, c(v_{i-1}, v_i) - t(v_{i-1}, v_i)\}$; $d''_i = d - d'_i$. Je-li $(v_{i-1}, v_i) \in \vec{U} \Rightarrow$ $t(v_{i-1}, v_i) = (v_{i-1}, v_i) + d'_i$. Je-li $(v_i, v_{i-1}) \in \vec{U} \Rightarrow$ $t(v_{i-1}, v_i) = (v_{i-1}, v_i) - d''_i$. Opakuj *krok 2*.
5. krok: Konec. Výsledkem jsou toky přidělené jednotlivým hranám.

Komentář ke kroku 2: Zlepšující cesta tedy vede orientovanými hranami grafu tak, že [1)]jde buď stejným směrem jako je orientace dané hrany a kapacita této hrany je menší než tok, který jí již byl přidělen, [2)]anebo jde opačným směrem než je orientace dané hrany a tok, který této hraně již byl přidělen, je větší než 0.
Stejná zlepšující cesta může a zpravidla i musí být zvolena víckrát.

Výhoda algoritmu: Pro celá čísla vede konečný počet kroků k cíli. (Pro reálná po převodu na celá také.)
Nevýhoda: Velmi pomalé díky nedokonalosti kroku 2. Další algoritmy jsou takovými modifikacemi tohoto algoritmu že se liší jen krokem 2.

<u>Dinicův algoritus</u>:
V kroku 2 bereme v úvahu jenom hrany na nejkratších drahách ze zdroje.