Algebraické souvislosti

Floyd-Marshall:

$$\mathbf{d_{ij}^{(k)} = \min\left(d_{ij}^{(k-1)},\ d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right)}$$

dvojoperace **min, +**

označíme $\oplus$, $\otimes$

$\otimes$ efekt složení dvou spojení u $\rightarrow$ v $\otimes$ v $\rightarrow$ x

$\oplus$ efekt kombinování alternativních spojení u $\rightrightarrows$ v $\oplus$

?Jaké vlastnosti musí tyto operace mít, aby to fungovalo?

Polookruh

$\boldsymbol{P} = \langle P, \oplus, \otimes, 0, 1\rangle$:

$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$	$\langle P, \oplus, 0\rangle$
$a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$	**je komutativní**
$a \oplus b = b \oplus a$	**monoid**
$a \oplus a = a$	**idempotence**
$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$	$\langle P, \otimes, 1\rangle$
$a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$	**je monoid**
$a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0$	**s nulovým prvkem**
$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$	**distributivnost**
$(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$	**zleva a zprava**

Uzavřený polookruh:

$a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus \ldots$ je definováno pro lib. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ a je

- **asociativní, komutativní, idempotentní a navíc**
- **distributivní vůči $\otimes$**

Kdy máme ∞ mnoho spojení? Když máme cykly!

Uzávěr $\mathbf{c^* = 1 \oplus c \oplus (c \otimes c) \oplus (c \otimes c \otimes c) \ldots}$

$\mathbf{0^* = 1, \qquad c \otimes c^* = c^* \otimes c, \qquad c^* = 1 \oplus (c^* \otimes c), \ \ldots}$

Příklady polookruhů

$\langle R^+ \cup \{\infty\}, \min, +, \infty, \mathbf{0}\rangle \quad a^* = \min(0, a, a+a, a+a+a, \ldots) = 0$

$\langle R \cup \{\infty, -\infty\}, \min, +, \infty, \mathbf{0}\rangle \quad a^* = 0$ nebo $-\infty$ (pro $a<0$)

... bude pokračovat později ...