Pravidelné a binární stromy

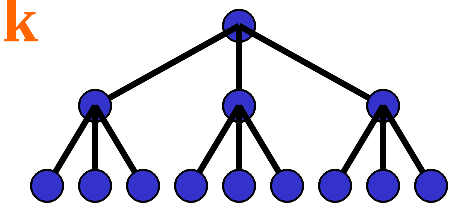
(Jedná se vesměs o orientované kořenové stromy.)

Pravidelný strom stupně r (≥1) … $\delta^+(u) = 0$ nebo r

Úplný pravidelný strom stupně r hloubky k

všechny listy jsou v hloubce k od kořene

(př. r=3, k=2)



<u>**V:**</u> **Pro každé n ∈ N existuje pravidelný strom stupně 2 s n listy** (má n-1 vnitř. uzlů a 2(n-1) hran)

?Jak je to pro jiné stupně? Jak odlišit různé stromy?

vnější délka $E(T_u) = \sum hl(v)$ přes listy v

vnitřní délka $I(T_u) = \sum hl(v)$ přes vnitřní uzly v

V: Pro pravidelný strom stupně r s n vnitřními uzly platí

$$E = I \cdot (r-1) + r \cdot n$$

?Jak vypadá strom s minimální vnější/vnitřní délkou?

Binární strom

- žádný uzel (prázdný)
- kořen, levý podstrom, pravý podstrom

?Rozdíl ? **binární strom x pravidelný strom stupně 2**

Průchody binárním stromem
- **preorder**: kořen, LS, PS
- **inorder**: LS, kořen, PS
- **postorder**: LS, PS, kořen

Kódování (binárních) stromů ... 0 / 1 nebo (a):

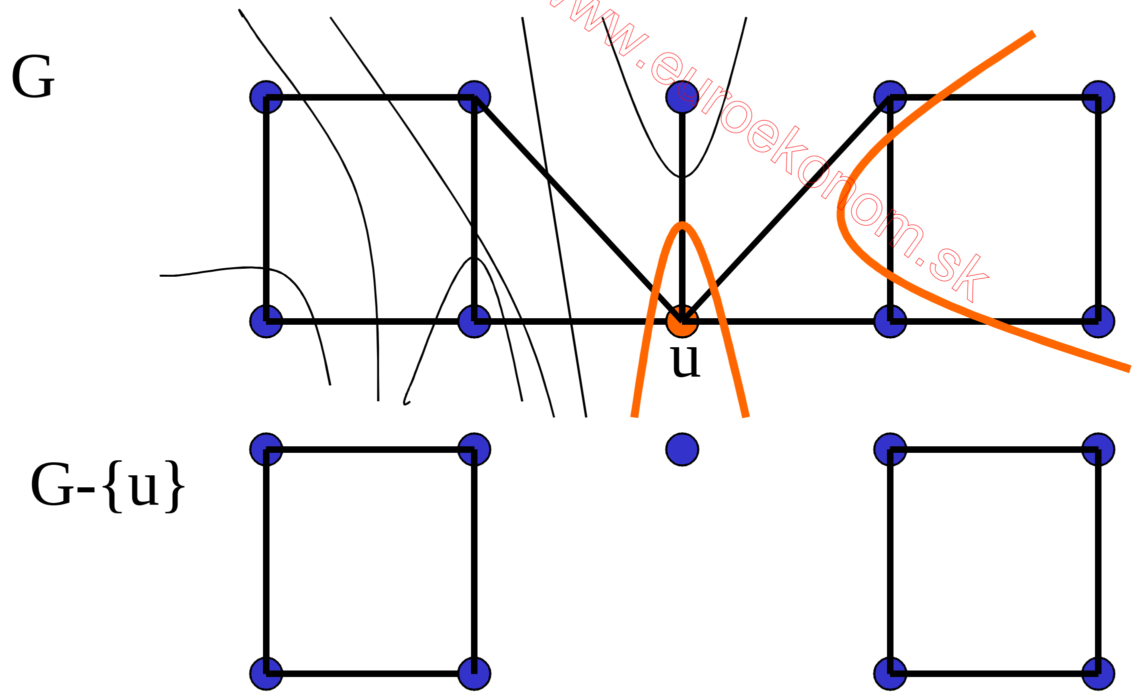
prázdný ... **()**, jinak ... **(kódLS kódPS)**

Separabilita a planarita

?Co je třeba z grafu odebrat, aby se „rozpadl“?

Hranový řez ... minimální S ⊆ H: **h(G - S) = h(G) - 1**

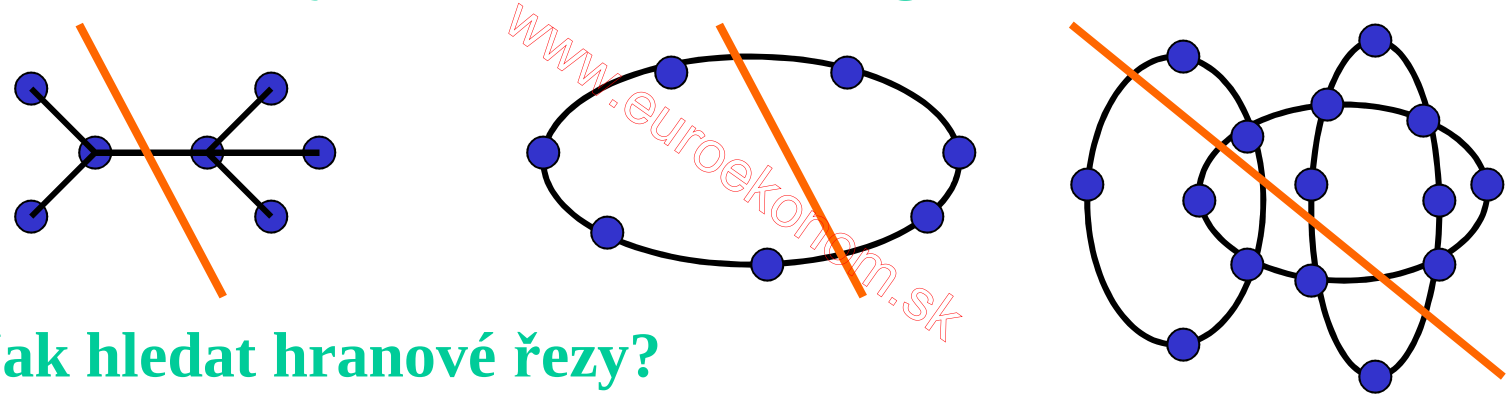
Artikulace grafu ... u ∈ U: G-{u} má více komponent než G



V: Množina hran incidujících s uzlem **u** souvislého grafu je jeho **hranovým řezem**, právě **když u není artikulací**.

V: Hranový řez obsahuje alespoň jednu **větev každé** kostry.

?Hranové řezy stromů, kružnic, E-grafů ... ?



?Jak hledat hranové řezy?

$H(U_1 \times U_2)$ pro souv. pografy indukované U_1, U_2

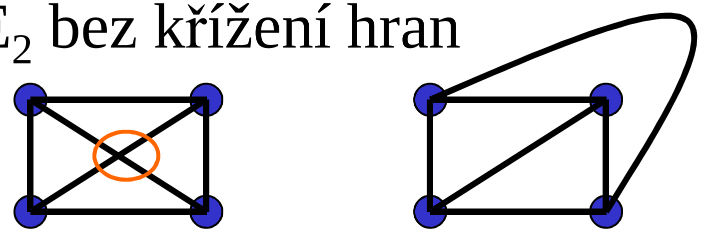
Fundamentální soustava hranových řezů / kružnic

Neseparabilní graf: pro $\forall\ G_1 \subseteq G$ mají G a $G\text{-}G_1$ alespoň dva uzly společné

Planární grafy

Planární graf ... lze nakreslit v E_2 bez křížení hran

?Je K_4 planární?

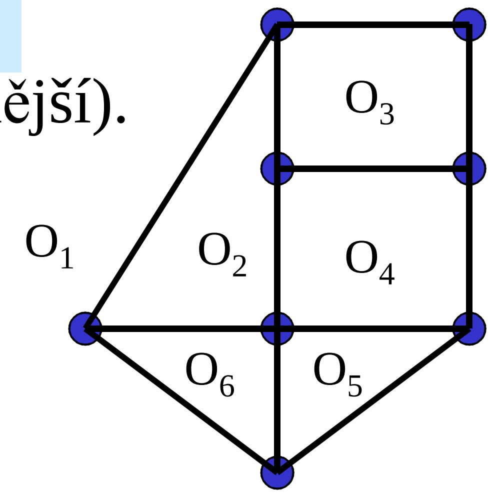


V: Nechť $G = \langle H,U,\rho\rangle$ je (souvislý) planární graf. Potom platí

$$|H| - |U| + 2 = r,$$

kde r je počet stěn grafu G (včetně vnější).

Jinak řečeno: $$r = \mu(G)+1$$



Důsledky:

- je-li každá stěna ohraničena kružnicí o **k** hranách, pak

$$|H| = k \cdot (|U|-2) / (k-2)$$

- $|H| \le 3 \cdot |U| - 6$ (pro k=3)
- $|H| \le 2 \cdot |U| - 4$ pokud G neobsahuje Δ

maximální plan. graf

(planární grafy jsou **řídké**!)

- **K_5 a $K_{3,3}$ jsou neplanární** (základní neplanární grafy)

V: (Kuratowski) Graf G je planární ⇔ neobsahuje podgraf **homeomorfní** s **K_5 a $K_{3,3}$**.

Homeomorfismus $G_1 \sim G_2$ ... jsou izomorfní nebo se jimi stanou po provedení **půlení hran** v jednom nebo obou

Minimální kostry a stromy

?Jak bychom generovali všechny kostry grafu?

Strom všech koster - **efektivní test** vzniku kružnic!

Množinový rozklad - dynamický soubor podmnožin dané množiny s operacemi

- MAKE-SET(x) vytvoří jednoprvkovou podmnožinu
- UNION(x,y) sjednocení podmnožin s prvky x a y
- FIND-SET(x) určí reprezentanta podmnožiny s prvkem x

Použití: <u>KOMP(G) - určení komponent NG</u>

for každý uzel u $\in$ U **do** MAKE-SET(u)
for každou hranu (u,v) $\in$ H **do**
    if FIND-SET(u) $\neq$ FIND-SET(v) **then** UNION(u,v)

? Složitost ? $\boxed{\Omega(|U| + |H|)}$ **? Výhoda ? dynamika!**

Implementace pomocí seznamů s odkazy na reprezentanta:

- MAKE-SET, FIND-SET ... **O(1)**
- UNION ... **O(min(m,n)) !!!??? pro vyvažování (vyžaduje uchovávat další pomocné údaje)**

Agregovaná složitost m operací, z toho n x MAKE-SET ...

$$\boxed{O(m + n.\lg n)}$$

Složitost určení kostry:

|U| -krát MAKE-SET max. 2.|H| -krát FIND-SET

(|U|-1) -krát UNION $\Rightarrow$ $n = |U|$, $m \leq 2.(|U|+|H|)$ $\Rightarrow$

$$\boxed{O(2|H| + 2|U|) + |U|.\lg |U|) = O(|H| + |U|.\lg |U|)}$$

?Dokážeme to ještě lépe? ANO