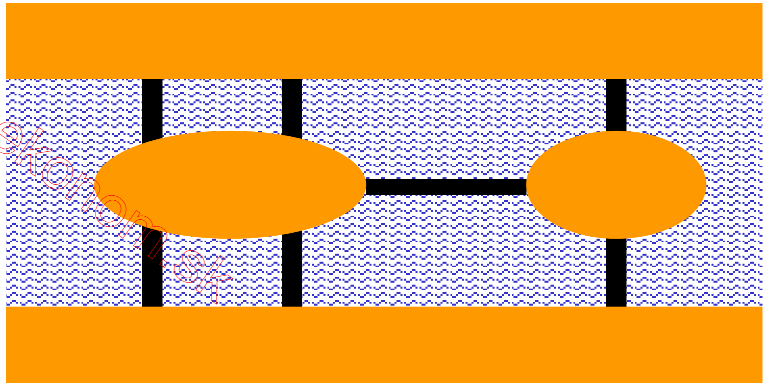
VLASTNOSTI GRAFŮ

Pokrytí a vzdálenost

Každý graf je sjednocením svých hran (jak je to přesně?).

?Lze nalézt složitější struktury stejného typu, ze kterých lze nějaký graf složit? Např. tahy?

Problém sedmi mostů města Královce



Pokrytí (neorientovaného) grafu = {H_i} rozklad množiny hran H, kde každá třída H_i je tahem grafu G. **Minimální pokrytí** má minimální počet tahů.

Eulerův graf: $\delta(u)$ je sudé pro všechny uzly $u \in U$

?Jak vypadají Eulerovy grafy?

V: G je Eulerův graf $\Leftrightarrow$ $G = \cup K_i$, $K_i \cap K_j = \emptyset$ (hranově)

V: Graf lze **pokrýt jedním uzavřeným tahem** $\Leftrightarrow$
je-li **souvislý a Eulerův.**

?A co když netrváme na uzavřeném tahu?

V: Nechť má souvislý graf G právě **2n uzlů lichého stupně**. Potom každé jeho minimální pokrytí tvoří **n otevřených tahů**.

?Jak je to s pokrytím OG orientovanými tahy?

Orientovaný Eulerův graf: $\delta^+(u) = \delta^-(u)$ pro vš. uzly $u \in U$

Nezávislost, klikovost, dominance

Nezávislá podmnožina uzlů $I \subseteq U$: $I \cap \Gamma(I) = \emptyset$

maximální nezávislá podmnožina (v sobě) ...

Nezávislost grafu G

$\alpha(G) =$ max $|I|$ pro $I \in \mathrm{Ind}(G)$

Klika grafu / **klikovost $\omega(G)$:** platí $\omega(G) = \alpha(-G)$

Dominující podmnožina uzlů $D \subseteq U$: $D \cup \Gamma(I) = U$

minimální dominující podmnožina (v sobě) ...

Dominance grafu G

$\beta(G) =$ min $|D|$ pro $D \in \mathrm{Dom}(G)$

Příklady ...

?Obecné vlastnosti?

V: D je minimální dominující podmnožina grafu G $\Rightarrow$
D’ = U - D je dominující podmnožina uzlů grafu G.

V: Nezávislá podmnožina I $\subseteq$ U je maximální, právě když je podmnožina I dominující.

Důsledek: $\beta(G) \leq \alpha(G)$

Příklady aplikací: úlohy o dámách x úlohy o strážích

?Složitost určování nezávislosti a dominance?

Strom generování nezávislých podmnožin

Barevnost grafu

?Co znamená „barvit“ graf (uzly, hrany)?

Stejně obarvené uzly **nesmí spolu sousedit.** Jak pro hrany?

Chromatické číslo grafu G:

χ**(G) = minimální počet barev** postačující k obarvení uzlů

?Jak se určí chromatické číslo grafu? Těžko!

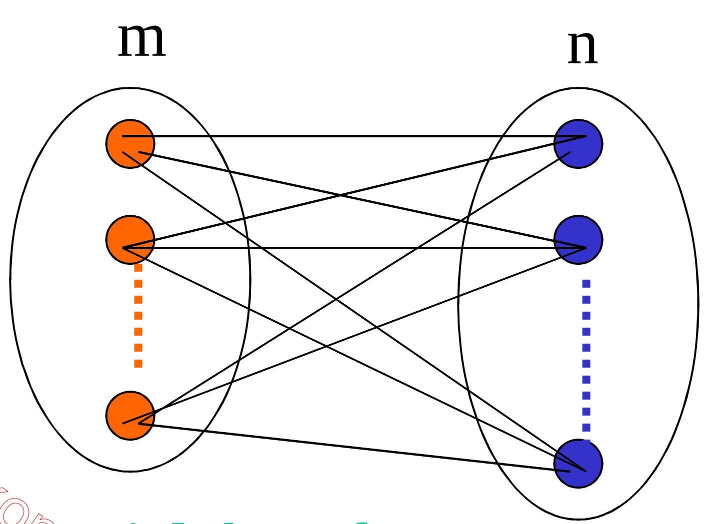
V:

- $\chi(G) \, . \, \alpha(G) \geq |U|$
- $\chi(G) \geq \omega(G)$
- $\chi(G) \leq \delta_{max} + 1$
- $\chi(G) = 2 \iff$ G neobsahuje kružnici liché délky

Bipartitní graf ... $\chi(G) = 2$ ... uzly se rozpadají do dvou tříd

Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$

má všechny možné hrany



?Jak vypadá maximální k-chromatický graf?

$n_1, n_2, \ldots, n_k$ ... počty uzlů jednotlivých barev

počty hran $n_1n_2 + n_1n_3 + \ldots n_1n_k + n_2n_3 + \ldots + n_{k-1}n_k =$

$= \sum n_in_j$ ... přes $i<j$

?Pro jaké hodnoty n_i bude počet hran maximální ?

Vzdálenost na grafu

d(u,v) = **délka** (počet hran) nejkratší cesty z u do v

(0) d(u,v) je nezáporné celé číslo

(1) $d(u,v) \geq 0$ a $d(u,v) = 0$ právě když $u = v$

(2) $d(u,v) = d(v,u)$

(3) $d(u,v) \leq d(u,z) + d(z,v)$

(4) je-li $d(u,v)>1$, pak $\exists z$: $z \neq u,v$: $d(u,v) = d(u,z) + d(z,v)$

Průměr grafu T(G) = max d(u,v) $\forall u,v$

Excentricita uzlu u v grafu G: **e(u,G)** = max d(u,v) $\forall v$

Poloměr grafu G: **r(G)** = min e(u,G) $\forall u$, **střed(-y) grafu**

V: **$r(G) \leq T(G) \leq 2.r(G)$,**

pro stromy dokonce **T(G)=2.r(G)** nebo **T(G)=2.r(G)-1**

?Jak to bude se vzdáleností v orientovaném grafu?

Uvažuje se nejkratší **orientovaná cesta**.

?Další možné zobecnění?

Grafy s (nezáporným) ohodnocením hran w: H $\rightarrow R^+$

w-délka orientovaného spojení $S=\langle h_1, h_2, ..., h_n \rangle$: $\sum w(h_i)$

d_w(u,v)= w-délka nejkratšího orientovaného spojení

Problém určování vzdáleností (nejkratších cest) budeme řešit později.

Stromy a kostry

?Který graf má kostru?

V: Nechť $G = \langle H,U \rangle$ je prostý graf.Potom

- G je strom
- $\forall u,v \in U$ existuje právě jedna cesta $C(u,v)$
- G je souvislý, ale $G-\{h\}$ není pro lib $h \in H$
- G je souvislý a platí $|H| = |U| - 1$
- G neobsahuje kružnice a $|H| = |U| - 1$
- G neobsahuje kružnice, ale $G \cup \{h\}$ ano

jsou ekvivalentní tvrzení.

Kostra grafu rozdělí hrany na větve a **tětivy**

Fundamentální soustava kružnic odpovídající dané kostře

?jak je to s „kostrou“ u nesouvislého grafu?

Hledáme kostry jednotlivých komponent - dostaneme **les**.

Cyklomatické číslo (počet nezávislých kružnic)

$$\mu(G) = |H|-|U|-p \quad \text{(p je počet komponent)}$$

Hodnost grafu (počet hran kostry nebo lesa grafu)

$$h(G) = |U|-p$$

Kořenový strom T_u (s kořenem **u**) - orientovaný strom, kde každá cesta C(u,v) je orientovanou cestou. **Kořenová kostra** - kostra, která je kořenovým stromem.

Uspořádaný strom - následníci každého uzlu jsou uvažováni v určitém pořadí