ORIENTOVANÉ GRAFY

DF: Orientovaný graf $G = \langle H, U, \sigma \rangle$, $H \cap U = \emptyset$,

$\sigma : H \to U \times U$ (uspořádané dvojice)

(hrany, uzly, incidence)

počáteční x **koncový** uzel hrany

následník x **předchůdce** uzlu

smyčka, **rovnoběžné** hrany

zavedení x **zrušení** orientace v grafu

sled, tah, cesta, kružnice, souvislost v orientovaném grafu - vše bez uvažování orientace hran

SILNÁ SOUVISLOST

DF: **Orientovaný graf** $G = \langle H, U, \sigma \rangle$, $H \cap U = \emptyset$,

$$\sigma : H \to U \times U \quad \text{(uspořádané dvojice)}$$

(hrany, uzly, incidence)

počáteční x **koncový** uzel hrany

následník x **předchůdce** uzlu

smyčka, **rovnoběžné** hrany

zavedení x **zrušení** orientace v grafu

sled, tah, cesta, kružnice, souvislost v orientovaném grafu - vše bez uvažování orientace hran

<u>DF:</u> Orientované spojení (délky $n \geq 0$) v orientovaném grafu *G* z uzlu *u* do uzlu *v* :

$$S = \langle u_0, h_1, u_1, h_2, \ldots, h_n, u_n \rangle$$

$$\sigma(h_i) = \langle u_{i-1}, u_i \rangle, u_0 = u, \; u_n = v$$

orientovaný tah **orientovaná cesta**

uzavřené x otevřené or. spojení **cyklus**

?Co pro délku nula?

<u>DF:</u> Silně souvislý orientovaný graf G - pro každou (uspořádanou!) dvojici uzlů *u*,*v* existuje orientované spojení z *u* do *v* (píšeme $u \to^* v$) . **Silná komponenta** grafu G - maximální silně souvislý podgraf.

?Co vlastně znamená silná souvislost?

V: Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1) *G* je silně souvislý orientovaný graf
2) *G* je souvislý a každá jeho hrana je v (nějakém) cyklu
3) pro každý rozklad $\{U_1, U_2\}$ množiny uzlů existují hrany $U_1 \rightarrow U_2$ a $U_2 \rightarrow U_1$

D: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

Důsledek: $G' = G - (\cup G_i)$, G_i - silné komponenty grafu G

(tj. podgraf zbylý po odebrání všech silných komponent) **nemá žádné cykly** ani hrany ležící v nějakém cyklu grafu G

!Základem silných komponent jsou **cykly!**

Kondenzace O.G. - silná komponenta se stane uzlem + hrany

Vstupní / výstupní stupeň uzlu

$\delta^+(u)$ - počet hran vycházejících z uzlu u (=0 pro **list**)

$\delta^-(u)$ - počet hran vstupujících do uzlu u (=0 pro **kořen**)

$\Gamma(u)$ - množina následníků uzlu u

$\Gamma^{-1}(u)$ - množina předchůdců uzlu u

?Souvisí nějak celkový součet stupňů s počtem hran?

V: $\boxed{\sum \delta^+(u) = \sum \delta^-(u) = |H|}$

Orientované grafy a binární relace

Acyklický graf - neobsahuje žádný cyklus

?Jak zjišťovat cykly v orientovaném grafu? Hledat je??

V: Pokud pro uzly orientovaného grafu G platí

$$\forall\, u \in U: \delta^{+}(u) \geq 1 \quad \text{nebo} \quad \forall\, u \in U: \delta^{-}(u)\ ,$$

potom graf G obsahuje alespoň jeden cyklus.

trochu silný požadavek ??

V: Graf G je acyklický $\Leftrightarrow$ G - {u} je acyklický pro libovolný kořen nebo list u.

$\Rightarrow$ **ALGORITMUS TESTOVÁNÍ ACYKLIČNOSTI !!**

Topologické uspořádání uzlů (nebo hran) OG

lze provést pouze pro acyklický graf!

?Algoritmus topologického uspořádání podle předchozí věty?

Efektivní implementace bude ukládat $\delta^{-}(u)$ a $\Gamma(u)$:

vypouští kořeny a upravuje $\delta^{-}(u)$ pro jejich následníky.

!Později uvedeme jednoduchý algoritmus!

Binární relace $R \subseteq X \times X$

Prostý OG $H \subseteq U \times U$

(orientovaný) **graf binární relace** R ... G_R :

$$h = \langle u, v \rangle \text{ vyjadřuje } u\ R\ v$$

složení grafů $G_R \bullet G_S = G_{R \bullet S}$:

(RE), …, (IR) - jak se projeví ??

Tranzitivní uzávěr grafu G / tranzitivní redukce

graf relace uspořádání … je acyklický

REPREZENTACE GRAFŮ

maticová

spojová

Matice incidence NG

A = **[** a_{ik} **]** obdélníková matice typu |U| x |H| **nad tělesem mod 2** (pozor na základní operace!)

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 \;\; \dots. \;\; \text{hrana } h_k \text{ inciduje s uzlem } u_i \\ 0 \;\; \dots. \;\; \text{jinak} \end{cases}$$

? Co nám říká matice incidence o grafu?
? Smyčky, rovnoběžné hrany?

$G_1 \cong G_2$?? právě když ?? $\mathbf{A_1} \cong \mathbf{A_2}$

h(**A**) ≤ |U| - 1 rovnost platí pro souvislé grafy (hodnost)

h(**A**) ≤ |U| - p obecný vztah pro graf s p komponentami