

ORIENTOVANÉ GRAFY

DF: Orientovaný graf $G = \langle H, U, \sigma \rangle$, $H \cap U = \emptyset$,

$\sigma: H \rightarrow U \times U$ (uspořádané dvojice)

(hrany, uzly, incidence)

počáteční x **koncový** uzel hrany

následník x **předchůdce** uzlu

smyčka, **rovnoběžné** hrany

zavedení x **zrušení** orientace v grafu

sled, tah, cesta, kružnice, souvislost v orientovaném grafu -
vše bez uvažování orientace hran

SILNÁ SOUVISLOST

DF: Orientovaný graf $G = \langle H, U, \sigma \rangle$, $H \cap U = \emptyset$,

$\sigma: H \rightarrow U \times U$ (uspořádané dvojice)

(hrany, uzly, incidence)

počáteční x **koncový** uzel hrany

následník x **předchůdce** uzlu

smyčka, **rovnoběžné** hrany

zavedení x **zrušení** orientace v grafu

sled, tah, cesta, kružnice, souvislost v orientovaném grafu -

vše bez uvažování orientace hran

DF: Orientované spojení (délky $n \geq 0$) v orientovaném grafu G z uzlu u do uzlu v :

$$S = \langle u_0, h_1, u_1, h_2, \dots, h_n, u_n \rangle$$

$$\sigma(h_i) = \langle u_{i-1}, u_i \rangle, u_0 = u, u_n = v$$

orientovaný tah **orientovaná cesta**
uzavřené x otevřené or. spojení **cyklus**

?Co pro délku nula?

DF: Silně souvislý orientovaný graf G - pro každou (uspořádanou!) dvojici uzlů u, v existuje orientované spojení z u do v (píšeme $u \rightarrow^* v$). **Silná komponenta** grafu G - maximální silně souvislý podgraf.

?Co vlastně znamená silná souvislost?

V: Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- 1) G je silně souvislý orientovaný graf
- 2) G je souvislý a každá jeho hrana je v (nějakém) cyklu
- 3) pro každý rozklad $\{U_1, U_2\}$ množiny uzlů existují hrany $U_1 \rightarrow U_2$ a $U_2 \rightarrow U_1$

D: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

Důsledek: $G' = G - (\cup G_i)$, G_i silné komponenty grafu G

(tj. podgraf zbylý po odebrání všech silných komponent)

nemá žádné cykly ani hrany ležící v nějakém cyklu grafu G

!Základem silných komponent jsou cykly!

Kondenzace O.G. - silná komponenta se stane uzlem + hrany

Vstupní / výstupní stupeň uzlu

$\delta^+(u)$ - počet hran vycházejících z uzlu u (=0 pro **list**)

$\delta^-(u)$ - počet hran vstupujících do uzlu u (=0 pro **kořen**)

$\Gamma(u)$ - množina následníků uzlu u

$\Gamma^{-1}(u)$ - množina předchůdců uzlu u

?Souvisí nějak celkový součet stupňů s počtem hran?

V:

$$\sum \delta^+(u) = \sum \delta^-(u) = |H|$$

Orientované grafy a binární relace

Acyklický graf - neobsahuje žádný cyklus

?Jak zjišťovat cykly v orientovaném grafu? Hledat je??

V: Pokud pro uzly orientovaného grafu G platí

$$\forall u \in U: \delta^+(u) \geq 1 \text{ nebo } \forall u \in U: \delta^-(u) \geq 1,$$

potom graf G obsahuje alespoň jeden cyklus.

trochu silný požadavek ??

V: Graf G je acyklický \Leftrightarrow G - {u} je acyklický pro libovolný kořen nebo list u.

\Rightarrow **ALGORITMUS TESTOVÁNÍ ACYKLIČNOSTI !!**

Topologické uspořádání uzlů (nebo hran) OG

Ize provést pouze pro acyklický graf!

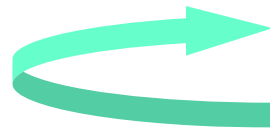
?Algoritmus topologického uspořádání podle předchozí věty?

Efektivní implementace bude ukládat $\delta^-(u)$ a $\Gamma(u)$:

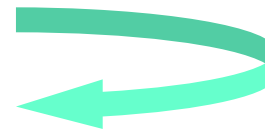
vypouští kořeny a upravuje $\delta^-(u)$ pro jejich následníky.

!Později uvedeme jednoduchý algoritmus!

Binární relace



$$R \subseteq X \times X$$



Prostý OG

$$H \subseteq U \times U$$

(orientovaný) **graf binární relace** $R \dots G_R :$

$h = \langle u, v \rangle$ vyjadřuje $u R v$

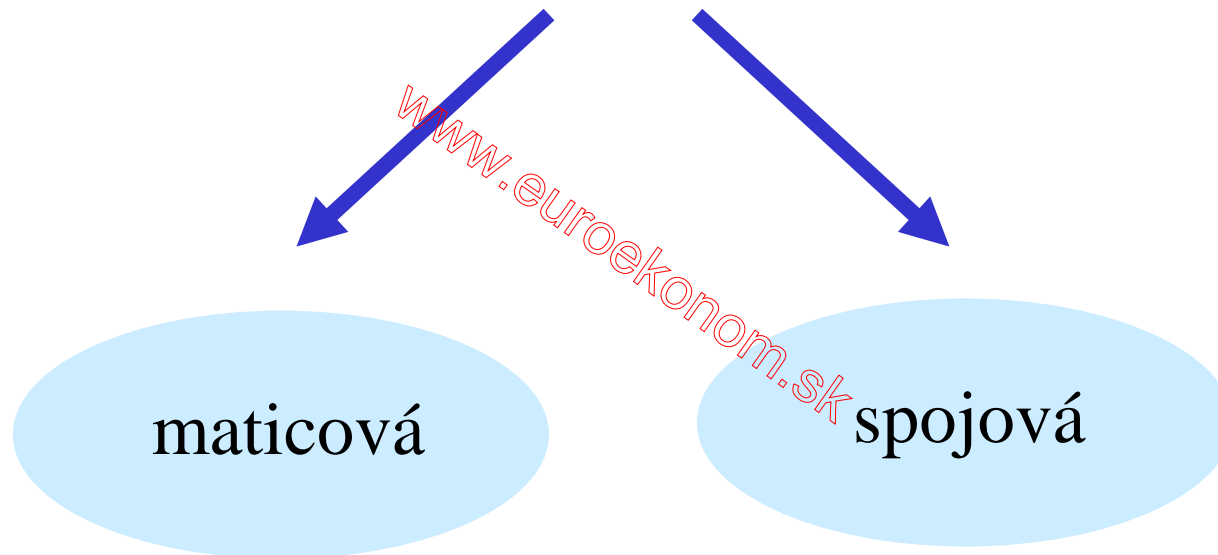
složení grafů $G_R \bullet G_S = G_{R \bullet S} :$

(RE), ..., (IR) - jak se projeví ??

Tranzitivní uzávěr grafu G / tranzitivní redukce

graf relace uspořádání ... je acyklický

REPREZENTACE GRAFŮ



Matice incidence NG

$\mathbf{A} = [a_{ik}]$ obdélníková matice typu $|U| \times |H|$ **nad tělesem mod 2** (pozor na základní operace!)

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \dots \text{hrana } h_k \text{ inciduje s uzlem } u_i \\ 0 & \dots \text{jinak} \end{cases}$$

? Co nám říká matice incidence o grafu?

? Smyčky, rovnoběžné hrany?

$$G_1 \cong G_2 \quad ?? \text{ právě když } ?? \quad \mathbf{A}_1 \cong \mathbf{A}_2$$

$h(\mathbf{A}) \leq |U| - 1$ rovnost platí pro souvislé grafy (hodnost)

$h(\mathbf{A}) \leq |U| - p$ obecný vztah pro graf s p komponentami