

TEORETICKÁ INFORMATIKA

J. Kolář, K201
Kolar@fel.cvut.cz

Důležité reference: <http://cs.felk.cvut.cz/~kolar>

<http://cs.felk.cvut.cz/agora>

skripta (vydala ČIS r. 2000)

Stručný obsah předmětu

Neorientované a orientované grafy

základní pojmy a vlastnosti, počítačová reprezentace grafů, typické algoritmy (prohledávání, minimální kostry, nejkratší cesty)

Toky v sítích

NP-úplné problémy

Algoritmy umělé inteligence

Modely strojů, programů a výpočtů

jazyky a automaty, Turingovy stroje, nerozhodnutelné problémy

O co doopravdy jde ...

www.euroekonom.sk
NAUČIT SE MYSLET!

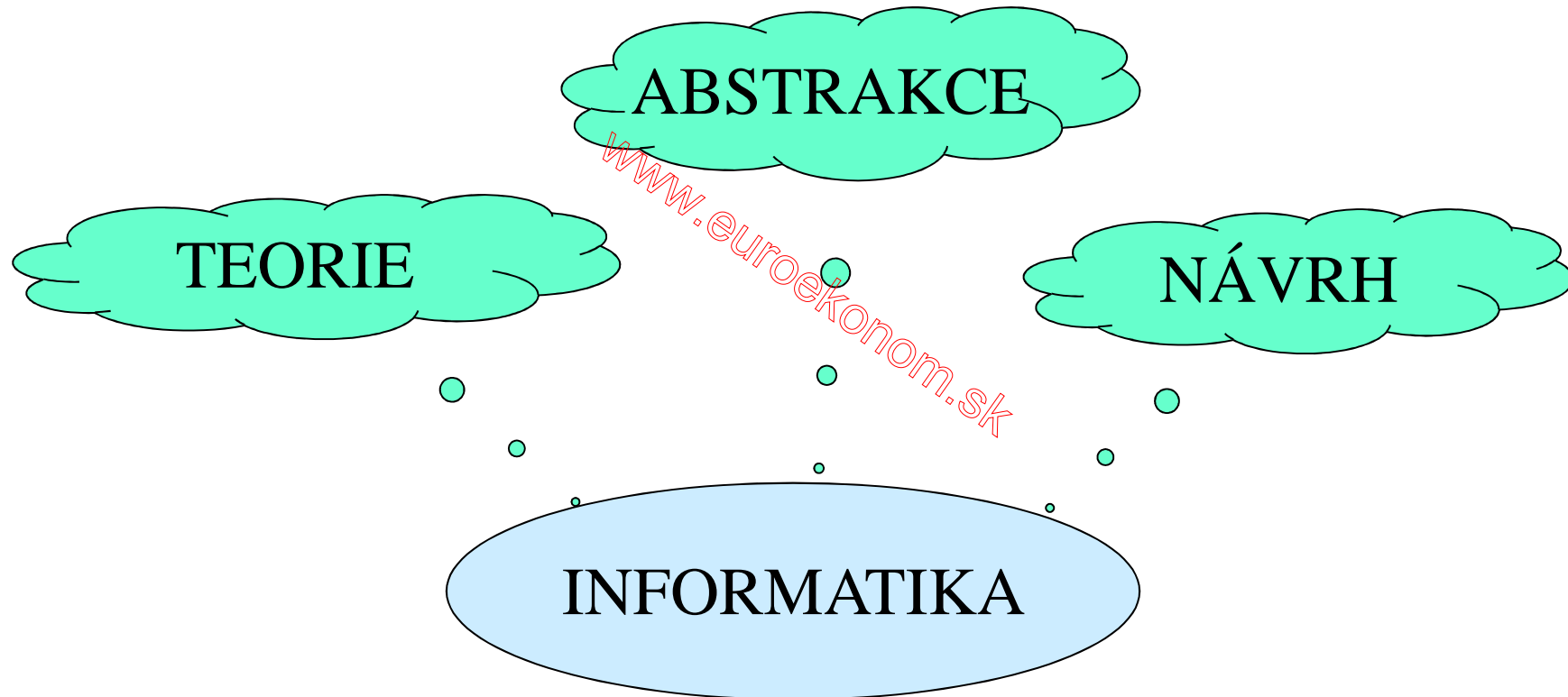
(nebo si to aspoň připomenout)

Vymezení oboru **INFORMATIKA** (dle P. Denninga)

Podoblasti informatiky

- algoritmy a datové struktury
- programovací jazyky
- architektura počítačů
- numerické a symbolické výpočty
- operační systémy
- softwarová metodologie a inženýrství
- databáze a vyhledávání
- umělá inteligence
- komunikace člověk - počítač

Základní paradigmatata informatiky



TEORIE ... převažuje např. v matematice

charakterizace objektů studia	(definice)
formulace možných vztahů	(tvrzení)
určení, zda vztahy platí	(důkaz)
interpretace výsledků	

ABSTRAKCE ... typická pro přírodní vědy

formulace hypotézy
návrh modelu a predikce chování
návrh experimentu a sběr údajů
analýza výsledků

NÁVRH ... inženýrské paradigma

stanovení požadavků
vypracování specifikace
návrh a realizace systému
testování systému

INFORMATIKA jako vědní disciplína ...

... je systematické studium algoritmických procesů spojených s popisem a zpracováním **INFORMACÍ**.

Zabývá se teorií, analýzou, návrhem, efektivností, realizací, použitím, ...

Základní otázka:

CO JE MOŽNO (EFEKTIVNĚ) AUTOMATIZOVAT?

VÝZNAM MODELŮ

MODEL

- zachycuje **důležité rysy** problému z reálného světa
- může se snadněji **reprezentovat a manipulovat** (např. na počítači)

Model získáváme **ABSTRAKČÍ** od některých (pro daný účel) nepodstatných vlastností

Příklad 1:

Výroková logika jako model (abstrakce) chování elektronických obvodů používaných při stavbě počítačů.

Abstrahuje od řady detailů - např. zpoždění hradel

Příklad 2:

Návrh rozvrhu - známe, kteří studenti jsou předběžně zapsaní na který předmět.

Jak rozvrhnout přednášky, aby se

- vyloučily konflikty (současný běh dvou nebo více předmětů, které si zapsal tentýž student)
- výuka zbytečně neroztahovala od rána do večera

Model - graf konfliktu předmětů

- co předmět, to uzel
- dva uzly spojíme hranou, pokud si aspoň jeden student napsal oba dotyčné předměty

Řešení na modelu

Postupně vybíráme *maximální nezávislé množiny* uzlů grafu, odpovídajícím předmětům přidělíme stejnou dobu přednášky.

Co to je **maximální nezávislá množina uzlů** ? (to se dovíme později)

Omezení modelu a “řešení“ problému

- nemusíme dostat nejkratší rozvrh
- rozvrh může mít okna
- podmínka vyloučení konfliktu je příliš silná

Problém 3:

Jak zajistit inteligentní chování robotů v reálném prostředí?

Musí znát svět, v němž mají působit, a jeho potřebné

zákonitosti \Rightarrow nutnost **reprezentace světa** (prostředí) a **znalostí**.

Znalosti nejsou jen jen **fakta** (*Sokrates je člověk*), ale také

pravidla:

Každý člověk je smrtelný

z toho lze odvodit *Sokrates je smrtelný*

Expertní systémy omezují zajímavý svět

SJEDNOCUJÍCÍ PRINCIPY

(nalézáme je v různých oblastech informatiky)

Algebry (kalkuly)

Představují dobře vytvořený a zvládnutý model používající vlastní notaci, v níž lze vyjadřovat a řešit problémy

Možnost vytvoření **teorie inženýrského návrhu** systémů

Např. pro výrokový počet - **Boolova algebra**

Rekurze

Velmi užitečná technika definování pojmů a řešení problémů

Projevuje se ve zlepšení **jednoduchosti, efektivnosti, ověřování správnosti**, atd.

Ukážeme vzájemný vztah mezi

ITERACÍ x INDUKCI x REKURZÍ

Iterace x Indukce x Rekurze

Iterace - běžný způsob opakovaného provedení posloupnosti operací

Rekurze - jiná cesta k dosažení stejného efektu, je ale jednodušší pro vytvoření, analýzu i pochopení, usnadňuje i provedení důkazu správnosti algoritmu, typicky s použitím ...

Indukce - může sloužit i jako metoda definice datových struktur

(např. *seznam*: *prázdný* nebo
prvek následovaný seznamem)

Indukce

Důkaz matematickou indukcí (POZOR, má přesná pravidla!)

$S(n)$ - tvrzení o (přirozeném) čísle n

1) základ indukce

dokáže se platnost $S(0)$
(nebo $S(1)$), pokud tvrzení nemá pro nulu smysl)

2) induktivní krok

pro všechna $n \geq 0$ (nebo 1) se dokáže, že

z platnosti $S(n)$ plyne platnost $S(n+1)$

alternativa - úplná indukce

2) ... z platnosti $S(0), S(1), \dots, S(n)$ plyne platnost $S(n+1)$

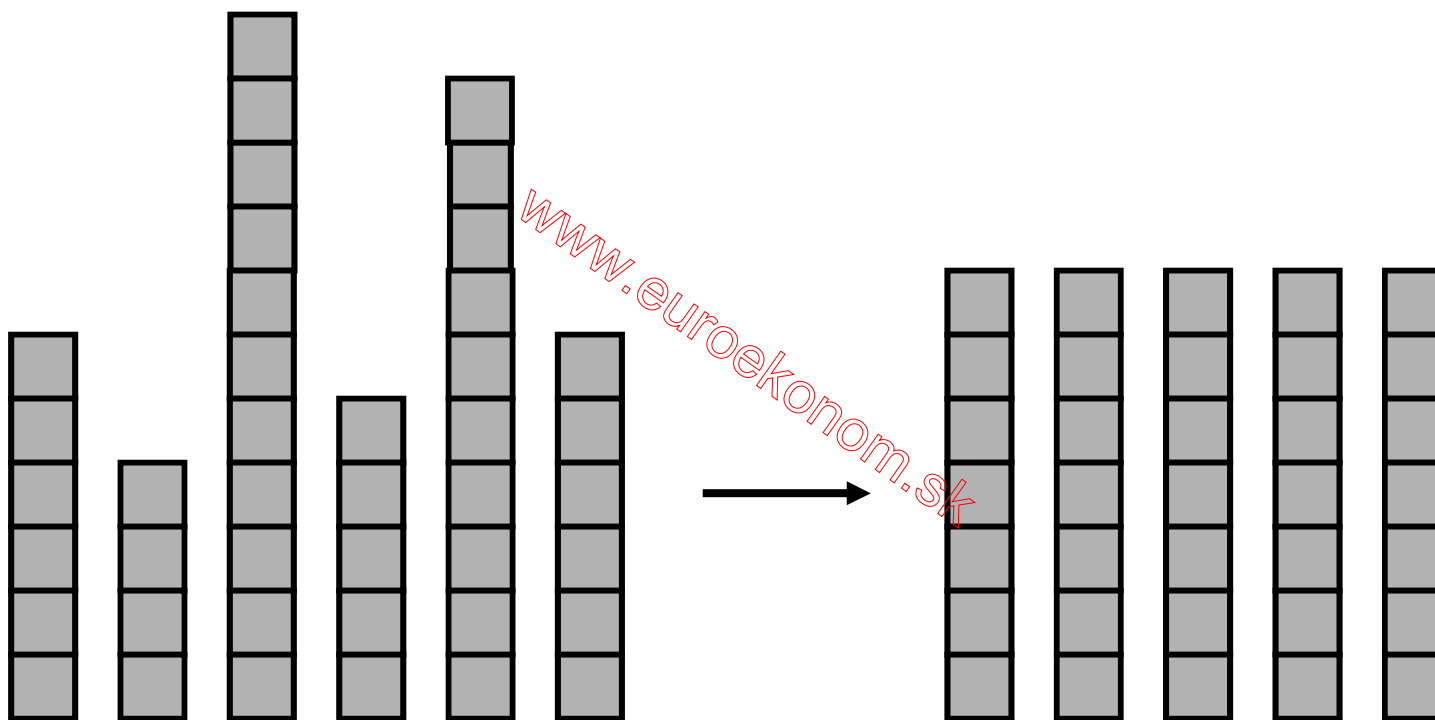
... a nyní se už budeme věnovat seznámení
s modely, které lze vyjádřit prostřednictvím pojmů
neorientovaných a orientovaných grafů.

Nejprve několik problémů k zamyšlení ...

Několik ukázkových příkladů (problémů)

www.gutroekonom.sk

Problém s kostkami



**Převést s minimálním počtem přesunů kostek
(opravdu velmi snadný!)**

Problém s pokladem

Čtvercová pravoúhlá síť + posloupnost povelů pro pohyb
např.

3N 4E 2SE 2SW

N - sever, NE - severovýchod, E - východ

SE - jihovýchod, S - jih, SW - jihozápad

W - západ, NW - severozápad

Jak daleko je cíl od výchozího místa?

(opravdu velmi snadný!)

Problém se sýrem

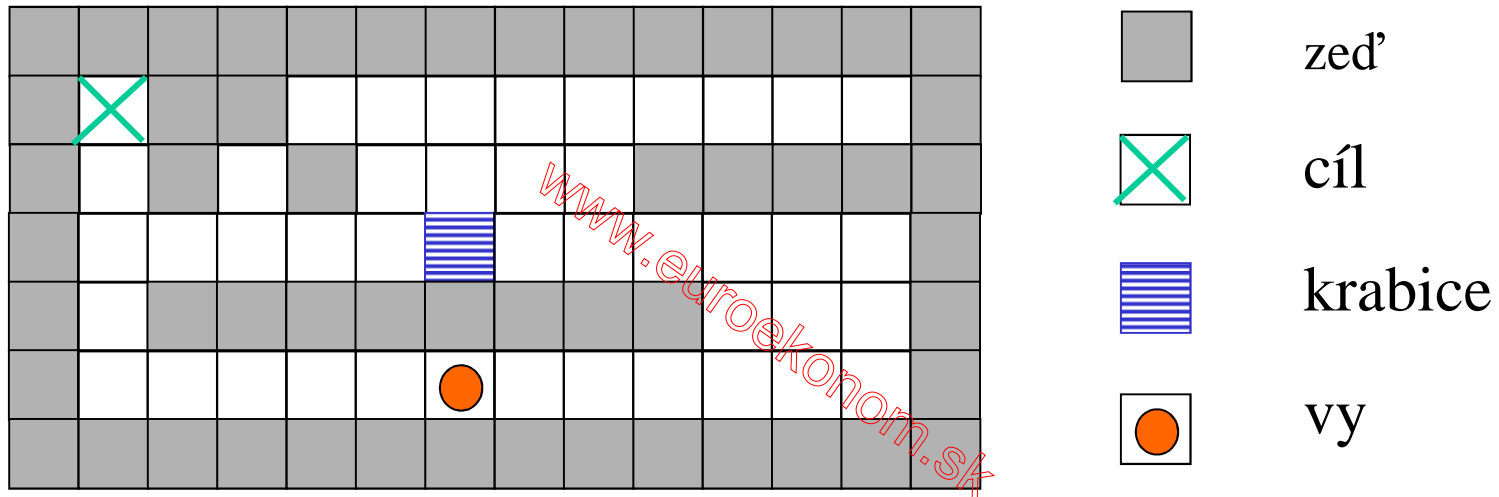
Máme VELKÝ kus ementálu, v něm malou myšku a kousek špeku. Myška umí přesně určit směr, ze kterého jí voní špek, ementálem se dokáže prokousat rychlostí 1mm/sec, dírami prolétne okamžitě.

Pro zadanou polohu myšky, špeku, středy a poloměry jednotlivých děr,

**určete minimální čas,
za který se myš může dostat ke špeku.**

(ehmm??)

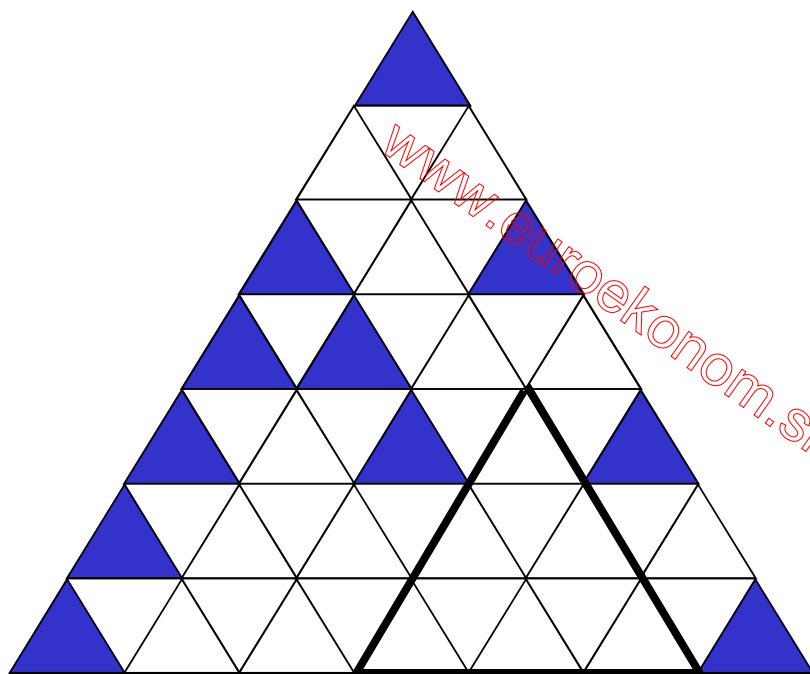
Problém s krabicí ve sklepě



**Je nebo není možné dopravit krabicí tlačáním
(zezadu) na určené místo?**

(ehmm??)

Problém s vystřihovánkou



**Jak nalézt
největší
bílý
trojúhelník ?**

Problém s výletem

n - počet měst, která můžeme navštívit (1, 2, ..., n)

k - počet dní, co máme k dispozici

$n \cdot (n-1)$ letových řádů pro lety mezi městy

d - perioda opakování (1 až 30)

c_1, c_2, \dots, c_d - ceny letů v jednotlivých dnech (0 znamená, že ten den není spoj)

Je možno létat přesně k dní (co den, to přelet jinam)?

Pokud ano, jak to udělat co nejlaciněji?

NEORIENTOVANÉ A ORIENTOVANÉ GRAFY

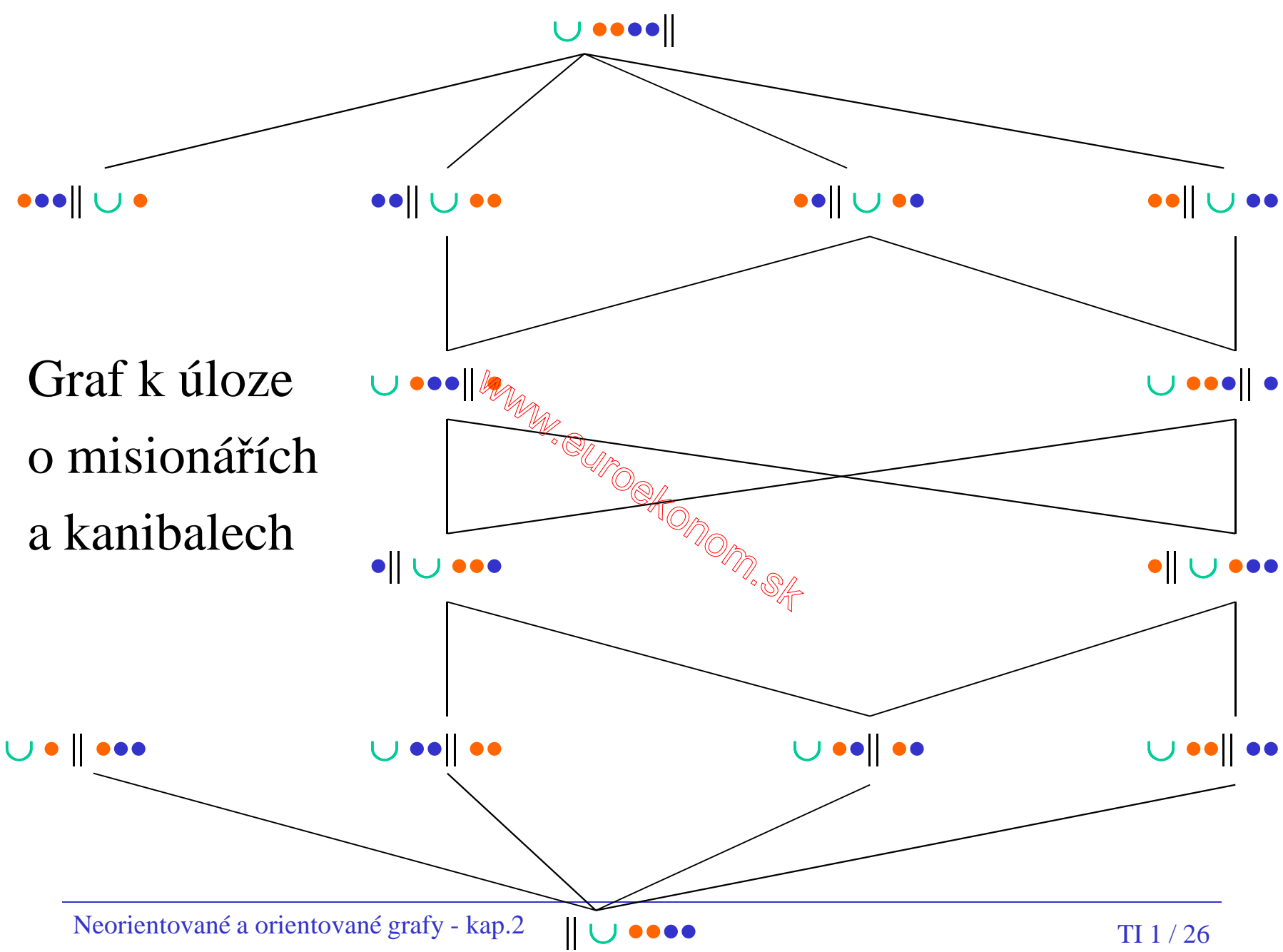
Ještě dvě „motivační“ úlohy „ze života“:

- Úloha o kanibalech, misionářích a jedné loďce (2● + 2● + U)
- Úloha o přelévání vody s nádobami na 5 a 3 litry

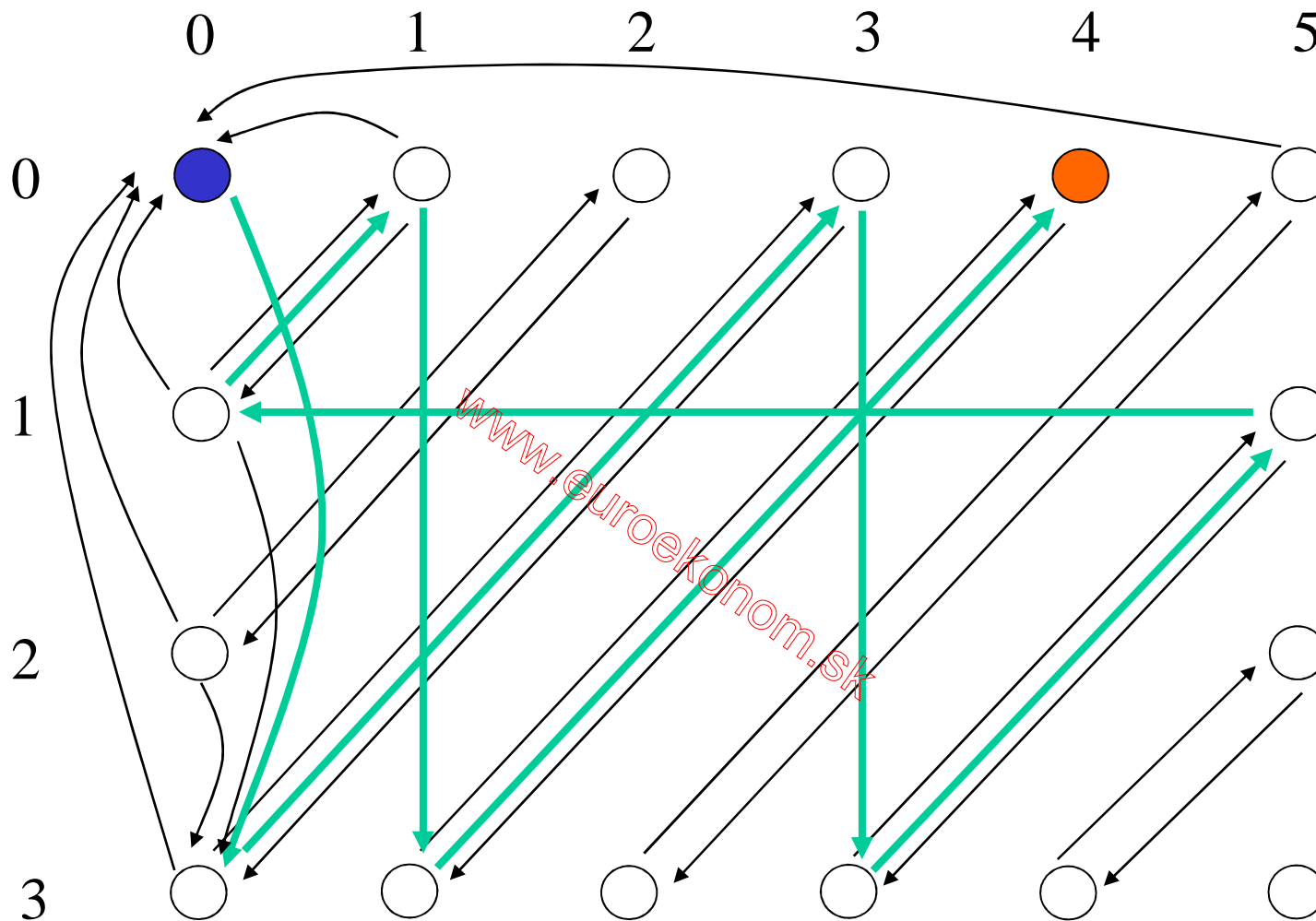
Řešení

- metodou pokusů a omylů
- pomocí grafového modelu

Výhody: převod na známý problém + možnost zobecnění



Graf k úloze
o misionářích
a kanibalech



Část grafu k problému přelévání vody

(NEORIENTOVANÉ) GRAFY A GRAFOVÉ OPERACE

Neorientovaný graf $G = \langle H, U, \rho \rangle$

$\rho : H \rightarrow U \otimes U$ (neuspořádané dvojice)

H **hrany** grafu G , $H(G)$

U **uzly** grafu G , $U(G)$

ρ **incidence** grafu, ρ_G

$\rho(h) = [u, v]$... **krajní uzly** hrany h

rovnoběžné hrany \Rightarrow **multigraf**
prostý graf

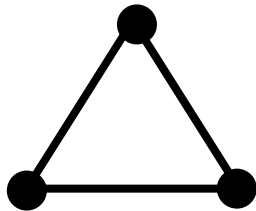
obyčejný graf - prostý a bez smyček

úplný graf $K_n = \langle (U), U \rangle$

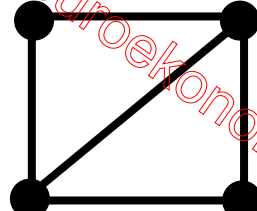
prázdný graf $\langle \emptyset, \emptyset \rangle^2$

diskrétní graf $\langle \emptyset, U \rangle$

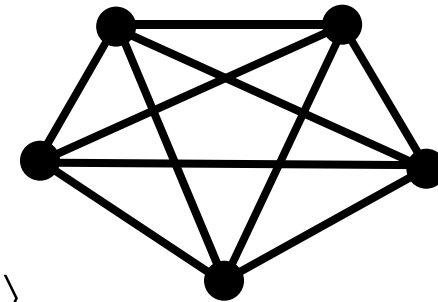
K_3



K_4



K_5



podgraf $G' = \langle H', U', \rho' \rangle \subseteq G = \langle H, U, \rho \rangle$

$H' \subseteq H$ & $U' \subseteq U$ & $\rho'(h) = \rho(h)$ pro všechny $h \in H$

faktor grafu ... podgraf se všemi uzly
(hranový podgraf)

podgraf **indukovaný podmínkou**

podmnožina uzlů U_1

podmnožina hran H_1

vypuštění uzlů U_2

vypuštění hran H_2

sjednocení a průnik grafů

disjunktní a hranově disjunktní grafy

rozdíl a doplněk

symetrická diference

konečný vs. nekonečný graf

izomorfismus grafů

$\varphi : G_1 \leftrightarrow G_2$ takové, že

$\varphi / H_1 : H_1 \leftrightarrow H_2$ je bijekce

$\varphi / U_1 : U_1 \leftrightarrow U_2$ je bijekce

φ **zachovává incidenci**, t.zn.

$$\varphi : \rho_1(h) = [u, v] \Rightarrow \rho_2(\varphi(h)) = [(\varphi u), \varphi(v)]$$

$G_1 \cong G_2$... izomorfní grafy

problém zjistit!!

morfismus grafů ... není nutně bijekcí