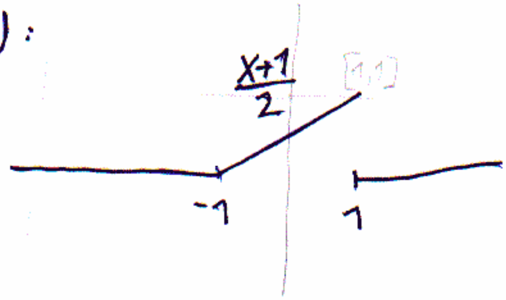
9.3.05

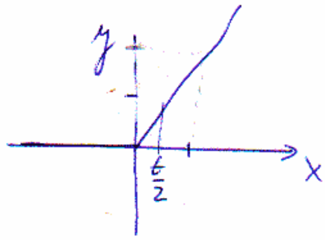
Př Odvoďte distribuční fci náhodné veličiny Y.

$f(x)$:

X:



Y: $Y = |X| + X$



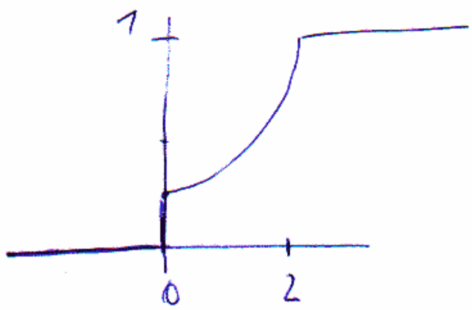
$y = 2x$

$$F_Y(t) = P[Y \le t] = P[|X| + X \le t] = \begin{cases} t < 0 : & P[X \in \emptyset] = 0 \\ t \ge 0 : & P[X \in (-\infty, \tfrac{t}{2} \rangle] = P_1 \end{cases}$$

$P[X \le \frac{t}{2}] \sim P[Y \le t]$

$$P_1 = \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} f(x)\,dx = \begin{cases} t < 2 & \int_{-1}^{t/2} \frac{x+1}{2}\,dx = I_1 \\ t \ge 2 & 1 \end{cases}$$

$$I_1 = \int_{-1}^{t/2} \frac{x+1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{\frac{t}{2}} = \frac{1}{16}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}$$

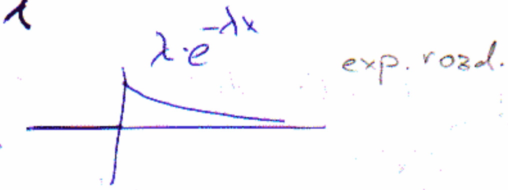


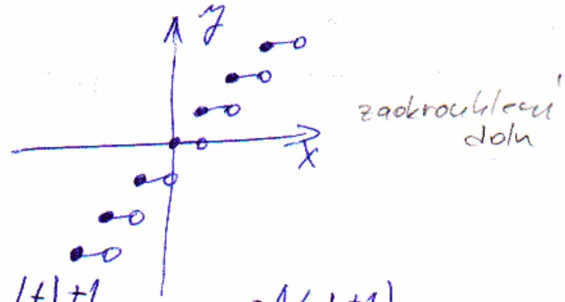
Př

X: exponenciální rozdělení s parametrem λ

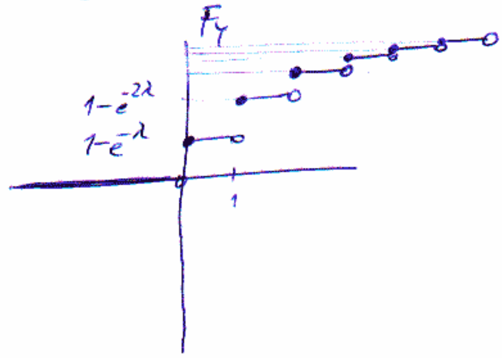
Y: $\lfloor X \rfloor$ [zaokrouhlení dolu]

$F_Y = ?$



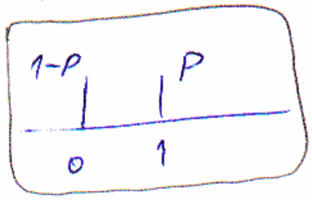


$$F_Y(t) = P[Y \le t] = P[\lfloor X \rfloor \le t] =$$
$$= P[x \in (-\infty; \lfloor t \rfloor + 1)] =$$
$$= \int_{-\infty}^{\lfloor t \rfloor + 1} f(x)\,dx = \begin{cases} t < 0 & F_Y(t) = 0 \\ t \ge 0 & \int_0^{\lfloor t \rfloor + 1} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\lfloor t \rfloor + 1} = \underline{1 - e^{-\lambda(\lfloor t \rfloor + 1)}} \end{cases}$$



„používáme hustotu $f(x)$ z náhodné veličiny Y určíme meze integrálu"

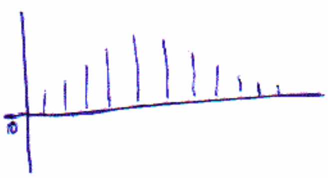
Př Alternativní rozdělení



z definice platí:

$$EX = 0(1-p) + 1p = p \qquad EX^2 = 0^2(1-p) + 1^2 p = p$$
$$DX = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Př Binomické rozdělení $\quad X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$



$$P[X = k] = \boxed{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}} \qquad k = 0, 1, \dots n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$a = p$, $b = 1-p$

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$EX = \underbrace{EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n}_{\text{součet alternativních výsledků}} = n \cdot p$$

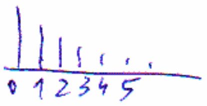
platí: $E(aX + bY) = aEX + bEY$

platí $DX = E(X - EX)^2$

Alternativní rozdělení je vlastně binomickým rozdělením ☺

$\boxed{\text{PF}}$ (Geometrické rozdělení) - Odvoďte EX, DX

$$P[X=k] = \boxed{(1-p)\cdot p^k}, \quad k = 0,1,2,3\ldots$$



$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)\, p^k = (1-p) \sum_{k=0}^{\infty} p^k = (1-p) \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{p^{k-1}}{p-1} =$$

$$= (1-p) \cdot \frac{1}{1-p} = 1$$

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-p)\, p^k = (1-p) \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p^k =$$

$$= (1-p) \cdot \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{p}{(1-p)}$$

$$EX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)\, p^k = (1-p) \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p^k =$$

$$= (1-p)\, \frac{p^2+p}{(1-p)^3} = \frac{p^2+p}{(1-p)^2}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{p^2+p}{(1-p)^2} - \frac{p^2}{(1-p)^2} = \frac{p}{(1-p)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p} \quad \Big/ \frac{d}{dk}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2} \quad \Big/ \cdot p$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p^k = \frac{p}{(1-p)^2}$$

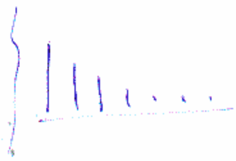
$$\sum_{k=0} k^2 \cdot p^{k-1} = \frac{(1-p)^2 + 2p(1-p)}{(1-p)^4} \quad \Big/ \cdot p$$

$$\sum_{k=0} k^2 p^k = \cancel{(1-p)}\, \frac{(1-p)+2p}{(1-p)^{\cancel{4}\,3}} \cdot p$$

$$\sum_{k=0} k^2 p^k = \frac{p+p^2}{(1-p)^3}$$

$\boxed{\text{PF}}$ (Poissonovo rozdělení)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} \qquad P[X=k] = \boxed{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}} \qquad k = 0,1,2\ldots$$



$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} \cdot \lambda}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

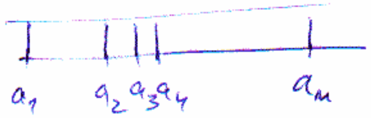
$$EX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \, \frac{\lambda^{k-1} \cdot \lambda}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left((k-1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right) \right) =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot (\lambda^2 \cdot e^{\lambda} + e^{\lambda} \cdot \lambda) = \lambda^2 + \lambda$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \lambda$$

$\boxed{\text{Př}}$ (Rovnoměrné diskrétní rozdělení)

$$P[X = a_k] = \boxed{\frac{1}{n}}$$



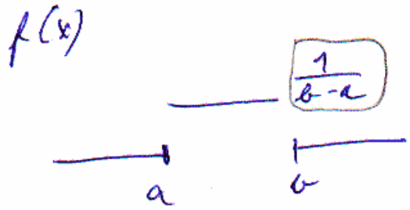
$$EX = \sum_{k=0}^{n} k\,\frac{1}{n} = \cancel{\frac{1}{n}} \cdot \cancel{(n+1)}\frac{n}{2} = \cancel{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$EX^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot a_k^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

$\boxed{\text{Př}}$ (Spojité rovnoměrné)



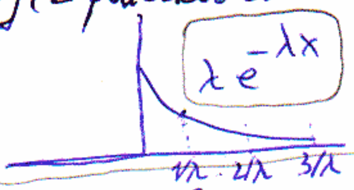
$$EX = \int_a^b \frac{1}{b-a}\cdot x\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}(b^2-a^2) = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$EX^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{b^3-a^3}{b-a} =$$

$$= \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)$$

$$DX = \frac{1}{3}(b^2+ab+a^2) - \frac{1}{4}(b+a)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$\boxed{\text{Př}}$ (Exponenciální rozdělení)



$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t}\,dt$$

$$\Gamma(a+1) = a\cdot\Gamma(a)$$

$$\Gamma(1) = 1 \qquad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$EX = \int_0^\infty x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left|\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-\lambda x} & v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{matrix}\right| =$$

$$= \left[x\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda x}\cdot\lambda\right]_0^\infty - \lambda\int_0^\infty -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= 0 + \frac{\lambda}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

$$EX = \int_0^\infty \lambda x\, e^{-\lambda x}\,dx = \left|\begin{matrix}\lambda x = u \\ \lambda dx = du \\ dx = \frac{du}{\lambda}\end{matrix}\right| = \int_0^\infty u e^{-u}\lambda^{-1}\,du = \frac{1}{\lambda}\cdot\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}$$

$$EX=\int_0^\infty x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx = \left|\begin{matrix} t=\lambda x \\ dt=\lambda dx\end{matrix}\right| = \int_0^\infty \frac{t}{\lambda}\, e^{-t}dt = \frac{1}{\lambda}\cdot\Gamma(2) =$$

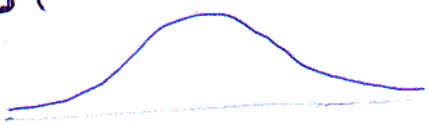
$$= \frac{1}{\lambda}\cdot 1\cdot\Gamma(1) = \frac{1}{\lambda}$$

$$EX^2 = \int_0^\infty \underline{x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}}_{\lambda}\,dx = \left|\begin{matrix} t=\lambda x \\ dt=\lambda dx\end{matrix}\right| = \int_0^\infty \frac{t^2}{\lambda^2}\cdot e^{-t}dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\,\Gamma(3) = \frac{1}{\lambda^2}\cdot\left(2\cdot\Gamma(2)\right) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$DX = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$\boxed{\text{Př}}$ (Normální rozdělení) $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$



a) Ověřte, že se jedná o hustotu

b) zjistěte EX, DX

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \left|\begin{matrix} u=x-\mu \\ du=dx\end{matrix}\right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\dots}\, e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du = \left|\begin{matrix}\text{sudá} \\ \text{funkce}\end{matrix}\right| = 2\cdot\int_0^\infty \frac{1}{\dots}\cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du =$$

$$= \left|\begin{matrix} 2\sigma^2 t = u^2 \\ 2\sigma^2 dt = 2u\,du \\ \frac{\sigma^2 dt}{u} = du \\ \frac{\sigma^2 dt}{\sqrt{2\sigma^2 t}} = du\end{matrix}\right| = 2\cdot\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\sigma^2 t}}\cdot e^{-t}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-t}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

skutečně se jedná o hustotu

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(u+\mu)\cdot\frac{1}{\dots}\, e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u\cdot\frac{1}{\dots}\cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du}_{\text{lichá fce} \Rightarrow =0} +$$

$$+\mu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\dots}\, e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du = \underline{\underline{\mu}}$$

↳ stejný integrál, jako jsem již počítal

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + 2u\mu + \mu^2)\cdot \frac{1}{\dots} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\, du = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{1}{\dots} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\, du +$$

$$+ \underbrace{\int u \cdot \dots}_{0 \text{ (lichá fce)}} + \underbrace{\int \mu^2 \dots}_{\mu^2} \qquad 2\int_0^\infty \frac{\overbrace{\sigma^2 dt}^{du} \cdot \overbrace{2\sigma^2 t}^{u^2}}{\sqrt{2\pi}\cdot \sigma\sqrt{2\sigma^2 t}}\, e^{-t}\, dt =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int t^{\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \mu^2 = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$DX = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

$\boxed{PF}$ (Stejné rozdělení)?

transformace $N(\mu,\sigma^2)$ do tabelovaných hodnot $N(0,1)$

$$Y_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \frac{1}{n}\sum X_i \end{cases} \qquad \frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{DY_n}} \xrightarrow[n=\infty]{} N(0,1)$$

$$Y_n \begin{cases} EY_n = n\mu & DY_n = n\cdot\sigma^2 & \dfrac{Y_n - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} = \dfrac{\frac{1}{n}Y_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \\ EY_n = \mu & DY_n = \frac{1}{n}\cdot\sigma^2 & \dfrac{Y_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \end{cases}$$

$\boxed{PF}$ Máme cca 2% zmetků. Jaká pst, že z 1000 výrobků bude zmetků více než 10 a zároveň méně než 30?

2%

$n = 1000$

$min = 10$

$max = 30$

$P(X_i = 1) = 0{,}02$

$P(X_i = 0) = 0{,}98$

$EY_n = 1000 \cdot p = 20$

$DY_n = 1000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 19{,}60$

$EX_i = p$

$DX_i = p(1-p)$ = alternativní rozdělení $EX = p \quad DX = p(1-p)$

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$P(10 \le Y_n \le 30) = ? \quad P\left(\frac{10 - EY_n}{\sqrt{DY_n}} \le \frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{DY_n}} \le \frac{30 - EY_n}{\sqrt{DY_n}}\right) =$$

$$\frac{30-20}{\sqrt{19{,}6}} = 2{,}258 \qquad \frac{10-20}{\sqrt{19{,}6}} = -2{,}258$$

$$\Phi\left(\frac{30 - EY_n}{\sqrt{DY_n}}\right) - \Phi\left(\frac{10 - EY_n}{\sqrt{DY_n}}\right) = \left|\Phi(a) - \Phi(-a)\right| = 2\,\Phi\left(\frac{30 - EY_n}{\sqrt{DY_n}}\right) - 1 =$$

$$\Phi(a) - (1 - \Phi(a))$$

$$= 0{,}976$$

2. řešení (Hrubý odhad)

$$\forall \delta > 0 : P\left[\left|\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right| \geq \delta\right] \leq \frac{1}{\delta^2}$$

obecný vzorec

$$P[Y_n \in \langle 10, 30 \rangle] \quad \left(P[|X-EX| > \varepsilon] < \frac{DX}{\varepsilon^2}\right)$$

$$\sigma \cdot \delta = \varepsilon \qquad P[|Y_n - EY_n| < \varepsilon] > 1 - \frac{DY_n}{\varepsilon^2}$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= 10 \\ EY &= 20 \\ DY_n &= 19{,}6 \end{aligned}\right\} \text{viz. 1. řešení} \qquad > 1 - \frac{19{,}6}{100} = 1 - 0{,}19 = \underline{\underline{0{,}804}}$$

$$\sum_{10}^{30} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{10}^{30} \binom{1000}{k} \cdot 0{,}02^k \cdot 0{,}98^{1000-k}$$

$$= \underline{\underline{0{,}9827}}$$

3. řešení Přesná pravděpodobnost

$\boxed{\text{Př}}$ (Binomické rozdělení) Jaká je pravděpodobnost, že padne k jedniček

$$P[X=k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

k jedniček $(0\ 0\ 0\ \overset{1.}{1}\ 0\ \overset{2.}{1}\ \ldots\ \overset{k.}{1}\ 0)$

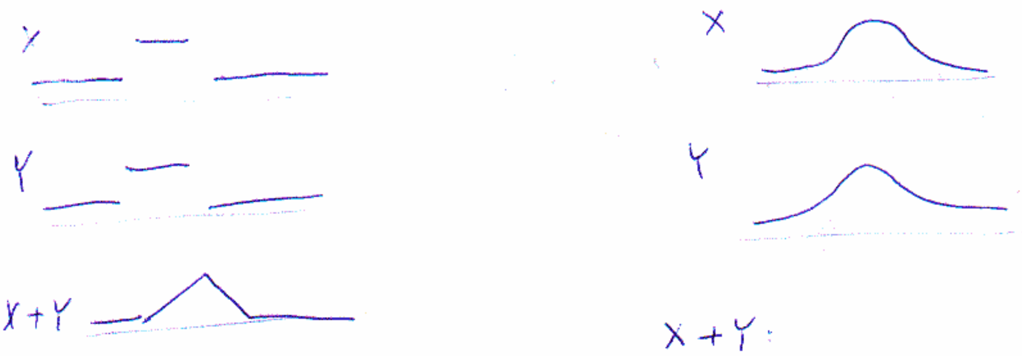
pravděpodobnost že padne $1 = p$

$0 = 1-p$

3 nuly po sobě $= (1-p)^3$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(k)!} = \binom{n}{k} = \text{kombinační číslo}$$

nerozlišuji jednotlivé jedničky ($k!$ možných pořadí jedniček)



Součet normálních rozdělení je normální rozdělení

důkaz:

$N(0,1)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$f_{X+Y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot f_Y(x-t)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(\cancel{t}-\cancel{x})^2}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-x^2-(t-x)^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-x^2-t^2+2tx-x^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2+tx-\frac{t^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2-tx+\frac{t^2}{2})}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[(x-\frac{t}{2})^2-\frac{t^2}{4}+\frac{t^2}{2}]}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-[(x-\frac{t}{2})^2+\frac{1}{4}t^2]}=\left|\begin{array}{l}\text{sudá fce}\\ \text{posunutá o } \frac{t}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\pi}\int_{\frac{t}{2}}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}t^2}\cdot e^{-(x-\frac{t}{2})^2}dx=\left|\begin{array}{l}u=(x-\frac{t}{2})^2\\ du=2x-t\,dx\\ dx=\frac{1}{2\sqrt{u}}du\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-u}e^{-\frac{1}{4}t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}du=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{4}t}\int_0^{\infty}e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{4}t^2}\overbrace{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)}^{=\sqrt{\pi}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{4}}\sim N(0,2)$$

$\Rightarrow$ (Součet normálních rozdělení je normální rozdělení)

Kvadrát rozdělení

$X_n = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_k^2$, kde $Y_i \sim N(0,1)$

počet stupňů volnosti

$$f\chi^2_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

▨ (Indukce) 1. ukážeme, že se jedná o hustotu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \left| \begin{matrix} t = \frac{x}{2} \\ dt = \frac{dx}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot t^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-t} \cdot 2dt = \frac{2 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}\,dt =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 1$$

$\Leftarrow$ důkaz, že se jedná o hustotu

$X \sim N(0,1)$

$$F_{X^2}(t) = P(X^2 \le t] = P[-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}] = \Phi(\sqrt{t}) - \Phi(-\sqrt{t}) =$$

$$\frac{dF_{X^2}}{dt} = f_{X^2}(t) = \varphi(\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} + \varphi(-\sqrt{t}) \frac{1}{2\sqrt{t}} = 2\varphi(\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$Y \sim f_1$

$X \sim f_n$

$f_{X+Y} = f_{n+1}$

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\cdot f_n(t-x)\,dx = \int_0^t \frac{1}{2^{\frac12}\Gamma(\frac12)} \cdot x^{-\frac12} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2^{\frac n2}\cdot\Gamma(\frac n2)} \cdot (t-x)^{\frac n2 -1}\cdot e^{-\frac{t-x}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\cdot\Gamma(\frac12)\cdot\Gamma(\frac n2)} \cdot e^{-\frac t2} \int_0^t (x^{-\frac12})\cdot(t-x)^{\frac n2-1}\,dx = \left| \begin{matrix} t\cdot u = x \\ t\,du = dx\end{matrix}\right| =$$

$$= K \cdot \int_0^1 t^{-\frac12} u^{-\frac12} (t - tu)^{\frac n2 -1}\cdot t\,du = K\cdot t^{\frac12}\, t^{\frac n2 -1} \underbrace{\int_0^1 u^{-\frac12}(1-u)^{\frac n2 -1}\,du}_{B(\frac12,\frac n2)}$$

$$f_{X+Y}(t) = \frac{t^{\frac{n+1}{2}+1}\cdot e^{-\frac t2}\cdot \cancel{B(\frac12,\frac n2)}}{2^{\frac{n+1}{2}} \cancel{\Gamma(\frac12)\Gamma(\frac n2)}} \cdot \Gamma\left(\frac12+\frac n2\right) \qquad B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$\blacksquare$

$\frac{n-1}{\sigma^2}\cdot S^2$ má rozdělení χ^2_{n-1}, pokud $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar X)^2$$

$n=2$: $\underline{\frac{(n-1)}{\sigma^2}}\cdot S^2 = \frac{1}{2\sigma^2}(X_1-X_2)^2 = \left(\frac{X_1}{\sqrt2\,\sigma} - \frac{X_2}{\sqrt2\,\sigma}\right)^2$

součet koef. je 0 $\Rightarrow$ stř. hodnota 0

$n=3$: $(n-1)S^2 = \frac12(X_3-X_1)^2 + \frac16(2X_2-X_1-X_3)^2$

$n=4$

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i-\bar X)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar X + \bar X^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\sum_{i=1}^n X_i \left(\frac1n\sum_{i=1}^n X_i\right) +$$

$$+ n\left(\frac1n \sum_{j=1}^n X_j\right)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac2n \sum_{(i)}\sum_{(j)} X_iX_j + \frac1n \underbrace{\sum_i\sum_j X_iX_j}_{=\Sigma^2} =$$

$$\sum x_i^2 - \frac{1}{n}\sum\sum x_{ij} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

= | matice singulární protože součet sloupce je $\emptyset$ | =

= | vlastní čísla matice jsou 0 a 1 | =

= vl. číslo 1: 1 1 1 … 1 „ČAROVÁNÍ S MATICEMA"

| $A = U \cdot D \cdot U^T$ U ∈ sloupce jsou vlastní vektory

$D \in \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots 0 \end{pmatrix}$

platí: $U \cdot U^T = E$ (jednotková matice |

⇒ rozptyl je 1

$(x_1 \; x_2 \; \dots x_n) \cdot U = Y_1, Y_2, Y \dots Y_n$ |

$$= (Y_1 \dots, Y_n) \cdot D \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_{n-1}^2 + 0 \cdot Y_n^2$$

$\boxed{\text{PŘ}}$ Odhadněte p, q metodou momentů

2 neznámé ⇒ potřebuji 2 rovnice

$X_i \in (0; 1; 2)$

$P_i(x) \in (p; q; (1-p-q))$

pokusy 0, 1, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 0

$\frac{1}{n}\sum x_i = m_1 = EX^1 = \frac{6}{10}$

$\frac{1}{n}\sum x_i^2 = m_2 = EX^2 = \frac{8}{10}$

$EX = q + 2 - 2p - 2q = 2 - q - 2p = \frac{6}{10}$

$EX^2 = q + 4 - 4p - 4q = \underline{4 - 3q - 4p}$

$$\left.\begin{aligned} EX &= x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 = \frac{6}{10} \\ EX^2 &= x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 = \frac{8}{10} \end{aligned}\right\} \gg \begin{aligned} p &= ? \\ q &= ? \end{aligned}$$

Pr 10.8.2 MM resp věrohodnostní fcí odhadněte p, q.

$X_i \in (0,1,2)$

$P_i \in (p, q, 1-p-q)$

pokusy : 0, 1, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 0

metoda momentů :

$EX = \sum_1^n x_i \cdot p_i$ => z definice

$m_1 = EX^1 = \frac{1}{n} \sum X_i$ ~ odhad

$m_2 = EX^2 = \frac{1}{n} \sum X_i^2$

$EX = 0 \cdot p + 1 \cdot q + 2 \cdot (1-p-q) = q + 2 - 2p - 2q = 2 - 2p - q$

$EX^2 = 0 \cdot p + 1 \cdot q + 4 \cdot (1-p-q) = q + 4 - 4p - 4q = 4 - 4p - 3q$

$\frac{6}{10} = 2 - 2p - q$

$\frac{8}{10} = 4 - 4p - 3q$

$-\frac{4}{10} = 0 - q$ $\qquad \frac{6}{10} = 2 - 2p - \frac{4}{10}$

$q = \frac{4}{10}$ $\qquad 1 = 2 - 2p \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

věrohodnostní fce : metoda maximální věrohodnosti (hledáme maximum)

$L(p,q) = p^5 \cdot q^4 \cdot (1-p-q)$ - ? aby p max. => derivace

$\frac{\partial L}{\partial p} = 5p^4q^4(1-p-q) - p^5q^4 = p^4q^4(5-5p-5q-p)$

$5p^4q^4 - 5p^5q^4 - 5p^4q^5 - p^5q^4$

$p^4q^4(5-6p-5q) = 0$

$6p = 5 - 5q$

$p = \frac{5-5q}{6}$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 4q^3p^5(1-p-q) - p^5q^4 = p^5q^3(4-4p-5q)$$

$$4-4p-5q = 0$$

$$p = \frac{4-5q}{4}$$

$$\frac{5-5q}{6} = \frac{4-5q}{4}$$

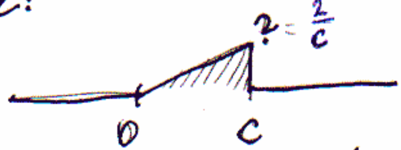
$$10-10q = 12-15q$$

$$5q = 2$$

$$q = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{Př}}$

f:



Pro hustotní funkci $f(x)$ platí $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

odhad přes MM a MMV

$f(x) = ax \qquad \frac{c \cdot v}{2} = 1 \qquad \underline{f_x(x) = \frac{2}{c^2}x}$

$f(0) = 0$

$f(c) = a \cdot c = v \qquad v = \frac{2}{c}$

$a = \frac{2}{c^2}$

$$\boxed{EX = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x \, dx}$$

1) $m_1 = EX \cong \overline{x}$

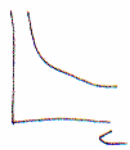
$$\overline{x} \cong EX = \int_0^c \frac{2}{c^2}x^2\,dx = \frac{2}{c^2}\frac{c^3}{3} = \frac{2}{3}c \cong \overline{x}$$

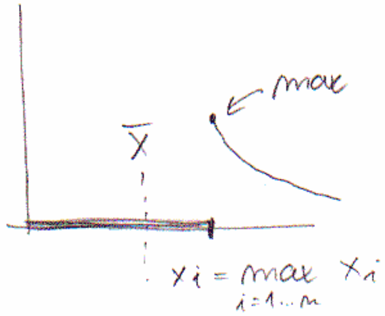
$$\underline{c = \frac{3}{2}\overline{x}}$$

vyplývá ze zadání

2) $L(c) = f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n) = \begin{cases} \forall_i\ x_i \in (0,c): L(c) = \frac{2}{c^2}x_1 \cdots \frac{2}{c^2}x_n \\ \exists_i\ x_i \notin (0,c): L(c) = 0 \end{cases}$

$L(c) = \frac{2^n}{c^{2n}} \prod_{i=1}^{n} x_i$ - pro $x_i > c$ $\qquad \frac{k}{c^m}$





$c = \max(x_i)$

až do max x_i je $L(c) = 0$

Př $X \sim N(\mu, \sigma)$

odhad μ, σ přes MM a MMV

1) $EX = \mu$

$EX^2 - (EX)^2 = DX$

$EX^2 = \sigma^2 + \mu^2$

$m_1 = \frac{1}{n} \sum x_i = \mu$

$m_2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 = \mu^2 + \sigma^2$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum x_i\right)^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \frac{1}{n^2} \sum_i^n \sum_j^n x_i x_j =$$

$$= \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \frac{2}{n^2} \sum\sum + \frac{1}{n^2} \sum\sum = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \frac{2}{n^2} \sum\sum x_i x_j$$

$$+ (\bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n-1}{n} s^2$$

protože $E\left(\frac{n-1}{n} s^2\right) \neq \sigma^2 \Rightarrow$ není nestranný odhad

2) $$L(\mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \cdot e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \ldots \cdot e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2}$$

„nyní pro jednoduchost zlogaritmujeme obě strany rovnice"

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\bar{x})^2 =$$

$$= n\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2}n\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} = +\frac{1}{2\sigma^2}\,2\cdot\sum(x_i-\mu)$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i-\mu) = 0$$

$$\sum x_i = n\mu$$

$$\mu = \frac{1}{n}\sum x_i$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\cdot\sum(x_i-\mu)^2 = 0 \qquad /\cdot\sigma^2$$

$$-\frac{n}{2} + \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2 = 0 \qquad /\cdot 2\sigma^2$$

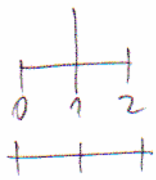
$$\sum(x_i-\mu)^2 = \sigma^2 n$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2 = \frac{n-1}{n}s^2$$

Př $U \sim \text{Binom}(2,\frac{1}{2})$

$V \sim$ Rovnoměrné na $\{0,1,2\}$

$X \sim \text{Mix}(U,V)$



$/\cdot c$

$/\cdot(1-c)$

$P[X=k] = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

	0	1	2
U	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
V	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
X	$\frac{4-c}{12}$	$\frac{2+c}{6}$	$\frac{4-c}{12}$

$$L(c) = \left(\frac{4-c}{12}\right)^{n_0+n_2}\cdot\left(\frac{2+c}{6}\right)^{n_1}$$

$$\ln L(c) = (n_0+n_2)\ln\frac{4-c}{12} + n_1 \frac{2+c}{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = -\frac{n_0+n_2}{12}\cdot\frac{12}{4-c} + n_1\frac{6}{2+c}\cdot\frac{1}{6} = 0$$

$$\frac{n_0+n_2}{c-4} + \frac{n_1}{c+2} = 0$$

$$n_1(4-c) = (n_0+n_2)(c+2)$$

$$4n_1 - cn_1 = (n_0+n_2)c + 2(n_0+n_2)$$

$$c = \frac{4n_1 - 2(n_0+n_2)}{n_0+n_1+n_2} \quad c\in(0,1)$$

MM:

$$\bar{X} = EX = 0\cdot\frac{4-c}{12} + 1\cdot\frac{2+c}{6} + 2\cdot\frac{4-c}{12} = 1$$

$$6\bar{X} = 6 \qquad \bar{X} = \frac{1\cdot n_1 + 2n_2}{n} = EX = 1$$

$$\bar{X} = 1$$

$$EX^2 = \frac{2+c}{6} + \frac{4-c}{3} = \frac{10-c}{6} = \frac{1}{n}\sum x_i^2 = \frac{n_1+4n_2}{n}$$

$$c = \frac{10n_0 + 4n_1 - 14n_2}{n}$$

$$EX = \bar{x} = \frac{n_1 + 2n_2}{n} = 1$$

$$EX^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 = \frac{n_1 + 4n_2}{n}$$

$$= \frac{2+c}{6} + \frac{4-c}{3} = \frac{10-c}{6} \qquad c = \frac{10n_0 + 4n_1 - 14n_2}{n}$$

	0	1	2	$n_0 \dots x$	x
				$n_1 \dots 2x$	x
X	$\frac{4-c}{12}$	$\frac{2+c}{6}$	$\frac{4-c}{12}$	$n_2 \dots x$	x

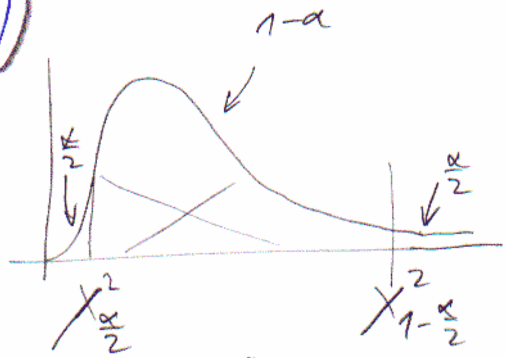
$$P[EX \in (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)] = 1-\alpha$$

$$\delta = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad : \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ známe } \sigma^2$$

$$\delta = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}} \quad : \quad \text{neznáme } \sigma^2$$

$$P\left[DX \in \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} ; \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)\right]$$

$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$



$$1-\alpha = P\left[\chi_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2} < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$$

$$\sigma^2 < \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}}, \quad \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2$$

Př

$n=5$

$218, 223, 219, 219, 238$ [V] $\bar{x} = 223{,}4$ $s^2 = 70{,}3$ výběrový rozptyl

95%ní EX, DX odhad $\boxed{s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2}$

výběrový průměr $= \bar{x} = 223{,}4$ [V] ; $\bar{x} \pm t_{0,975}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}$

$$\boxed{EX \in \left(\bar{x} - t_{0,975}(4)\cdot\sqrt{\frac{s^2}{5}};\ \bar{x} + t_{0,975}(4)\cdot\sqrt{\frac{s^2}{5}}\right)}$$

$$\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2 = \frac{5{,}4^2+0{,}4^2+4{,}4^2+4{,}4^2+14{,}6^2}{4} = 70{,}3$$

$t_{0,975}(4) = 2{,}7764$ „studentovo rozdělení"

výběrový rozptyl

$$EX \in \left(223{,}4 - 2{,}7764\cdot\sqrt{\frac{70{,}3}{5}};\ 223{,}4 + 2{,}7764\sqrt{\frac{70{,}3}{5}}\right)$$

$$(212{,}79;\ 234)$$

$\chi^2_{0,975}(4) = 11{,}143$

$\chi^2_{0,025}(4) = 0{,}48442$

$$\boxed{DX \in \left(\frac{4\cdot 70{,}3}{\chi^2_{0,975}(4)};\ \frac{4\cdot 70{,}3}{\chi^2_{0,025}(4)}\right)} = \left(\frac{4\cdot 70{,}3}{11{,}143};\ \frac{4\cdot 70{,}3}{0{,}48442}\right) =$$

$$= (25{,}24;\ 580{,}488)$$

$$\sigma \in (5{,}02;\ 24{,}09) = (\sqrt{25{,}24};\ \sqrt{580{,}488})$$

Př Kolikrát musíme opakovat měření náh. veličiny X, abychom měli 95%ní jistotu, že platí:....

$$P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha - EX\right| < 0{,}1\sigma\right] \geq 0{,}95$$

$$P[|\bar{x} - EX| < 0{,}1\sigma] \geq 0{,}95$$

$$P[EX \in (\bar{x} - 0{,}1\sigma;\ \bar{x} + 0{,}1\sigma)] \geq 0{,}95$$

$$\delta = 0{,}1\sigma = u_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = u_{0,975}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{u_{0,975}}{\sqrt{n}} = 0{,}1$$

$$\left(\frac{u_{0,975}}{0{,}1}\right)^2 = n$$

$$n = \frac{u^2_{0,975}}{0{,}01} = 100\cdot 1{,}95996^2 = 385$$

„normované normální rozdělení"

$\boxed{\text{Př}}$ 10.8.4 Určete mez pro EX, která nebude s 95%ní jistotou překročena.

$P[EX \in (-\infty, M)] = 95\%$ (nepřekračuje určitou Mez)

$M = \bar{x} + t_{1-\alpha}(n-1) \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$

$P[X \leq M]$

máme málo hodnot & nenormální (exponenciální) rozděl.
=> jiná formulace. Hledáme max. dobu čekání

X ... exponenciální rozdělení

data 16, 0,2, 0,5, 1, 0, 2, 4, 0 ... $\Sigma = 30 \quad n = 10$

$\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \Sigma = \frac{30}{10} = \underline{3}$

M = ?

$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$

$EX = \frac{1}{\lambda} = \bar{x} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{3}$

$P[X \leq M] = 0{,}95$

$\int_0^M \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^M = -e^{-\lambda M} + 1 = 0{,}95$

$1 - 0{,}95 = e^{-\lambda M}$

$\ln 0{,}05 = -\lambda M$

$M = -3 \ln 0{,}05 = \underline{\underline{8{,}987}}$

=> 95% budu čekat maximálně 8,987 min.

$P[EX \in (-\infty; \bar{x} - u_{0,95} \frac{1}{\sqrt{n} \lambda})]$

$P[EX \in (-\infty; 3 + \frac{1{,}64485 \cdot 3}{\sqrt{10}})]$

$\underline{P[EX \in (-\infty; 4{,}5)]}$

EX pro exp. rozdělení

$EX = \frac{1}{\lambda}$

Otestujte, zda oba 2 druhy výrobků jsou stejně kvalitní. Normální rozdělení. $\boxed{11}$

n_1	18	19	19	21	22	20	19	21	22	18	19
$n_2 =$	11	19	20	21	20	18	22	21	19	20	21

$\bar{x}_1 = 19{,}81$

$\bar{x}_2 = 20{,}1818$

stačí 95%ní jistota

$H_0 \quad EX_1 = EX_2$

$H_1 \quad EX_1 \neq EX_2$

oboustranný $\Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)$

$$\boxed{S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{(i)}(x_i - \bar{x})^2}$$

$s_1^2 = \frac{1}{10}(\dots) = 2{,}163$

$s_2^2 = \frac{1}{10}(\dots) = 1{,}363$

$\frac{2{,}163}{1{,}363} > F_{0{,}975}(10,10)$

$1{,}587 > 3{,}7168$

$$\boxed{t = \frac{|\bar{y} - \bar{x}|}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}}$$

!

$$\frac{|19{,}81 - 20{,}1818|}{1{,}327 \cdot \sqrt{\frac{2}{11}}} > t_{0{,}975}(20)$$

$0{,}642 > 2{,}086 \Rightarrow$ NEZAMÍTÁME

$$s^2 = \frac{(10)\cdot 2{,}163 + (10)\, 1{,}363}{20} = 1{,}763 = s^2 \quad s = 1{,}327$$

$$\boxed{s^2 = \frac{(n-1)\cdot s_1^2 + (m-1)\, S_2^2}{n+m-2}}$$

!

$\boxed{Př}$ laborant

zamítací pravidlo $\quad |\bar{x}| > 0{,}05\ g$

Hladina významnosti $1-\alpha$

$n = 10$

$H_0 : EX = 0$

$H_1 : EX \neq 0$ (oboustranný $\Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$)

x - rozdíl mezi skutečnou a naměřenou hodnotou

$$\boxed{T = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s/\sqrt{n}}}$$

!

$$|\bar{x}| > \sqrt{\frac{s^2}{n}}\; t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

$$\frac{|\bar{x} - \check{c}|}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

správná hodnota	2,0	2,0	2,0	3,0	3,0	3,0	4,0	4,0	4,0	5,5
měřená h.	2,2	2,0	2,0	3,1	3,1	2,8	4,0	4,1	5,1	4,8

$\Delta \quad 0{,}2;\ 0;\ 0;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ -0{,}2;\ 0;\ 0{,}1;\ -0{,}1;\ 0{,}2$

$\bar{x} = 0{,}03 \qquad s = 0{,}1159$

$0{,}03 \ngtr 0{,}05$

$$t_{1-\alpha}(9) = 0{,}05 \cdot \sqrt{\frac{n}{s^2}} = 0{,}05 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{1}{0{,}1159} = 1{,}364$$

$$\boxed{t_{1-\alpha}(n-1) = |\bar{x}| \cdot \sqrt{\frac{n}{s^2}}}$$

Př 10.86 1000x házím kostkou. Určete interval, ve kterém bude s $P = 95\%$ součet bodů

$EX = 3,5$

$\delta = u_{0,975}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leftarrow \sigma^2 = DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$

$P[EX \in (\bar{x}-\delta;\ \bar{x}+\delta)] = 0,95$

$$\boxed{\delta = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

$= P[\bar{x} \in (EX-\delta;\ EX+\delta)] =$

$= P\left[\sum_{j=1}^{n} x_j \in (n \cdot (EX-\delta),\ n \cdot (EX+\delta))\right]$

$1000 \cdot (3,5-\delta),\ 1000 \cdot (3,5+\delta)$

$\sigma^2 = DX$ - spočítám DX z definice $\frac{91}{6}$

$\sum_{(i)} x_i^2 p_i = \frac{91}{6}$

$\delta = 0,2414 = 1,95996 \cdot \sqrt{\frac{91}{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1000}}$

$u_{0,975} = 1,95996$

HYPOTÉZY

Alternativní hypotéza		H_0 správně	H_0 není správně
H_0	$\mu = c$		
H_1	$\mu \neq c$ $<$ $>$		

$P[\text{vyvracím} \mid H_0 \text{ je správná}] = \alpha$

$P[\text{nevyvracím} \mid H_0 \text{ je správná}] = 1-\alpha$

$P[\text{vyvracím} \mid H_0 \text{ neplatí}] = 1-\beta$

$P[\text{nevyvracím} \mid H_0 \text{ neplatí}] = \beta$

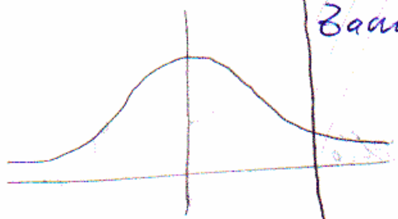
Př 10 měření (vážení cukru) 990, 1010, 985, 950, 975, 975, 990, 1010, 950, 1025 $n = 10$

$\bar{x} = 986$

H_0 ... $EX = 1000$

H_1 ... $EX < 1000$ $(t_{1-\alpha}(n-1))$

hladina významnosti = 95%



Zamítací pravidlo:

$T >$ kvantil

$\frac{(\bar{x}-EX)}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} > t_{1-\alpha}$

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{9}(4^2+24^2+1^2+36^2+\dots) = \frac{1}{9} \cdot 5570 = 615,55$

$\frac{EX-\bar{x}}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{1000-986}{\sqrt{\frac{615,55}{10}}} = \frac{14}{\sqrt{61,555}} = 1,7844 > t_{0,95}(9) =$ nezamítáme

$t_{0,95} = 1,8331$

Př Dva vzorky: $X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma^2)$

H_0 $\mu_1 = \mu_2$

H_1:

zamítací pravidlo

$\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$

$\frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$

H_0 : data jsou z konkrétního rozdělení $(\lambda, \sigma, \mu, \dots)$

H_1 ...

hodnoty	$\langle a,b \rangle$	$(b,c\rangle$	....		
četnost	n_1	n_2	n_3	n_k	$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$
teoretická četnost	$n \cdot p_1$	$n \cdot p_2$	$n \cdot p_3$	$n \cdot p_k$	

zamítací pravidlo $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} > \chi_{1-\alpha}(k-1-q)$ odhad

Př (životnost žárovek)

hodiny	kusy
0 – 300	53
300 – 600	41
600 – 900	30
900 – 1200	22
1200 – 1500	16
1500 – 1800	12
1800 – 2100	9
2100 – 2400	7
2400 – 2700	5
2700 – 3000	3
3000 – 3300	2
3300 – ∞	0
	200

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{jinde} \end{cases}$$

MMV : $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$

$$p_1 = \int_0^{300} \hat{\lambda} e^{-\hat{\lambda} x} \, dx$$

hodiny	kusy	$\phi \cdot n_i$	p_i	$\overset{200}{\overset{\Vert}{n}} \cdot p_i$	$\frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i}$
0-300	53	7950	0.2912	58.25	0.473
300-600	41	19450	0.2064	41.28	0.002
600-900	30	2250	0.1463	29.26	0.019
900-1200	22	23100	0.1037	20.74	0.077
1200-1500	16	21600	0.0735	14.7	0.115
1500-1800	12	19800	0.0521	10.42	0.24
1800-2100	9	17550	0.0369	7.38	0.35
2100-2400	7	15750	0.0262	5.23	0.6
2400-2700	5	12750	0.0195	3.7	} *
2700-3000	3	8550	0.0131	2.62	
3000-3300	2	6300	0.0043	1.86	} •
3300-	0	0	0.0227	4.54	

Σ n = 200 17430

$\bar{x} = \frac{17430}{200} = 871{,}5$

$\hat{\lambda} = 0{,}0011474$

$\boxed{Př}$ H_0: data z rovnoměrného rozdělení $\alpha = (95\%$

H_1: data nejsou z — " —

(Máme tabulku s narozenými dětmi v jednotlivých měsících 57)

	O_i		$m \cdot p_i$	$(O_i - mp_i)^2/m \cdot p_i$
1	21 182	P_1	21 465,6 = A	3,75
2	19 960	P_2	19 388,3 = B	16,86
3	22 787	P_3	A	81,34
4	22 805	P_3	20 773,1 = C	198,75
5	23 120	P_1	A	127,51
6	21 859	P_3	C	56,76
7	21 367	P_1	A	0,45
8	20 357	P_1	A	57,25
9	20 946	P_3	C	1,44
10	20 037	P_1	A	95,08
11	18 728	P_3	C	201,33
12	19 592	P_1	A	163,53

Σ 252 740

$P_1 = \frac{31}{365}$

$P_2 = \frac{28}{365}$

$P_3 = \frac{30}{365}$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - mp_i)^2}{mp_i} = 1004,05$$

$$1004,05 > \chi^2_{1-\alpha}(\underbrace{k-1}_{11})$$

$$\chi^2_{0,95}(11) = 24,725$$

$\Rightarrow$ ZAMÍTÁME H_0

$\boxed{Př}$

počet částic	0	1	2	3	4	5	6	7
četnost	112	168	130	68	32	5	1	1

$\Sigma = 517$

Ověřte poissonovo rozdělení (a) $\lambda = 1,5$ (b) λ

$$P[X = k] = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \frac{e^{-1,5} \cdot 1,5^0}{0!} =$$

5 – ∞

teor. četnost	141,3	183	119	52	17	6
$(O_i - mp_i)^2/mp_i$	5,92	1,25	1,00	5,22	13,84	0,4

$\Sigma = 27,64$

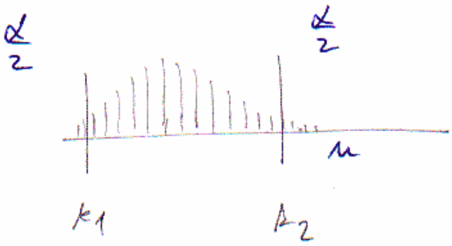
Hladina významnosti 0,95.

znaménkový test

$H_0 \dots \tilde{x} = x_{0,5} = \bar{c}$

$H_1 \dots \tilde{x} \neq \bar{c}$

$\overbrace{+ \; - \; + \; - \; + \; + \; \dots \; +}^{n}$



$\sum + = T \qquad P[T = k] = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$

jestliže $\sum +$ padne do intervalu $(\dots; -k_1)$ nebo $(k_2; \dots)$, tak zamítáme

Př: 15 let bylo teplotně nadprůměrných 5 podprůměrných ? Jsou obavy o oteplování oprávněné?

~~Wilcoxův test~~

	$+a_1$	$+a_2$	$-a_3$	$-a_4$
R:	3	2	1	4

zamítací pravidlo:

$P(\min(S^+, S) \leq w_n(\alpha)) \leq \alpha$

$\sum R^+ = S^+$

$\sum R^- = S^-$

Př: (tvrdost před testem a po testu)

před	3,15	2,98	3	2,75	3,21	3,33	2,95	2,81	3,26	2,88
po	3,21	2,99	3,11	2,91	3,22	3,28	3,09	3,00	3,28	2,99
rozdíl	6	1	11	16	1	-5	14	19	2	11
pořadí bez ohledu na znaménko	5	1	7	9	2	4	8	10	3	6

$S^+ = 51$

$S^- = 4$

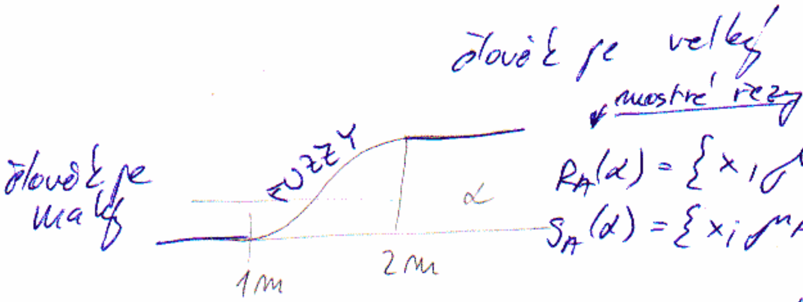
Podle tabulky je zamítací pravidlo splněno $\Rightarrow$
zamítáme (95%)
nezamítáme (99%)

FUZZY MNOŽINY

$\chi_A: R \to \{0,1\}$

$A \subseteq R$

$\mu_A: R \to \langle 0,1\rangle$



ostré řezy

$R_A(\alpha) = \{x;\ \mu_A(x) \geq \alpha\}$

$S_A(\alpha) = \{x;\ \mu_A(x) > \alpha\}$

$x \in A$ ← nový smysl

$\mu_A(x)$

$R_A: \langle 0,1\rangle \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$

1) $R_A(0) = R$
2) $\alpha < \beta:\ R_A(\alpha) \supseteq R_A(\beta)$
3) $R_A(\beta) = \bigcap_{\alpha<\beta} R_A(\alpha)$

$\boxed{V}$

$M: \langle 0,1\rangle \to \mathcal{P}(R)$

1) $M(0) = R$
2) $\alpha < \beta:\ M(\alpha) \supseteq M(\beta)$
3) $M(\beta) = \bigcap_{\alpha<\beta} M(\alpha)$

$\Rightarrow$ M je systém řezů

$\mu_A(x) = \sup\{\alpha \in \langle 0,1\rangle;\ x \in \underset{R_A(\alpha)}{M(\alpha)}\}$

$\mathrm{supp}\, A = \{x;\ \mu_A(x) > 0\} = S_A(0)$

$\mathrm{core}\, A = R_A(1) = [\{x;\ \mu_A(x) = 1\}]$

$h(A) = \sup_{x\in R} \mu_A(x)$

$A = \{(1,1), (2, 0{,}8), (3, 0{,}4), (4, 0)\}$ — stupeň náležení pro ostatní prvky je $\emptyset$.

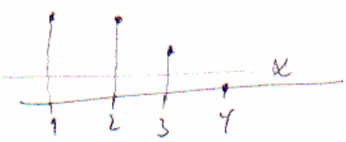
↑ Fuzzy množina výčtem prvků

$\alpha = 0: \quad R_A(\alpha) = R$

$\alpha \in (0; 0{,}4\rangle: \quad R_A(\alpha) = \{1, 2, 3\}$

$\alpha \in (0{,}4; 0{,}8\rangle: \quad R_A(\alpha) = \{1, 2\}$

$\alpha \in (0{,}8; 1\rangle: \quad R_A(\alpha) = \{1\}$

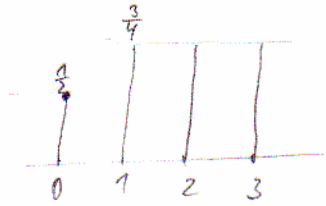


$\alpha = 0 : \quad R_A(\alpha) = \mathbb{R}$

$\alpha \in (0, \frac{1}{2} \rangle \; R_A(\alpha) = \{0, 1, 2, 3\}$

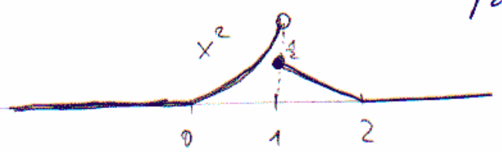
$\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \rangle : R_A(\alpha) = \{1, 2, 3\}$ — s rostoucím α klesá množina

$\alpha \in (\frac{3}{4}, 1 \rangle : R_A(\alpha) = \emptyset$



$\boxed{Př}$

převeďte do horizontální reprezentace tuto fuzzy



$$\mu_A(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \in (0, 1) \\ -\frac{x}{2} + 1 & \text{pro } x \in \langle 1, 2) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$x_1^2 = \alpha \Rightarrow x = \sqrt{x}$

$-\frac{x_2}{2} + 1 = \alpha \Rightarrow -x_2 = 2(\alpha - 1)$

$R_A(0) = \mathbb{R}$

$R_A(\alpha) = \langle \sqrt{\alpha} ; 2(1-\alpha) \rangle \qquad \alpha \in (0, \frac{1}{2} \rangle$

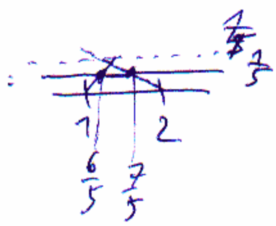
$R_A(\alpha) = \langle \sqrt{\alpha} ; 1) \qquad \alpha \in (\frac{1}{2}, 1 \rangle$

$\boxed{Př}$ $R_A(0) = \mathbb{R}$

$R_A(\alpha) = \langle 1 - \alpha, 2 - 3\alpha \rangle \qquad \alpha \in (0, \frac{1}{5} \rangle$

$R_A(\alpha) = \emptyset \qquad \alpha \in (\frac{1}{5}, 1 \rangle$

supp :



$A \subseteq B \overset{df}{\Longleftrightarrow} \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$R_A(\alpha) \leq R_B(\alpha) \quad \Rightarrow$ řezově konzistentní

$\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$

$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$

$\neg$: 1) $\alpha < \beta \Rightarrow \neg\alpha \geq \neg\beta$

2) $\neg\neg\alpha = \alpha$

na:

$\forall \beta \, \exists \alpha : \neg\alpha = \beta$

$\alpha = \neg\beta$

$\neg\alpha = \neg\neg\beta = \beta$

prosté:

$\neg\alpha = \neg\beta$

$\neg\neg\alpha = \alpha = \neg\neg\beta = \beta$

(standardní negace)

$s\neg\alpha = 1 - \alpha$

$\neg\alpha = i^{-1}(s\neg(i(\alpha)))$ $\quad i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ rostoucí

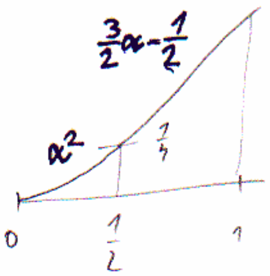
$i(x) = x^{w} \quad w > 0$

$Y_2\neg\alpha = (1-\alpha^{w})^{\frac{1}{w}}$

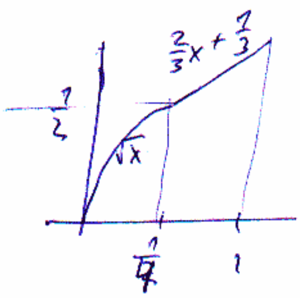
PŘ

Jak vypadá obecná negace generovaná tímto i

i:



i^{-1}



$\frac{1}{4}a + b = \frac{1}{2}$

$a + b = 1$

$\frac{3}{4}a = \frac{1}{2} \quad a = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{2}a + b = \frac{1}{4}$

$a + b = 1$

$\frac{1}{2}a = \frac{3}{4}$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \; ; \; x > \frac{1}{2}$ $\quad$ $y = x^2 \; ; \; x < \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ spojitá bijekce v bodě $\frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$ $\quad$ $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$

inverze $\frac{2y+1}{3} = x \; ; \; y > \frac{1}{4}$ $\quad$ $x = \sqrt{y} \; ; \; y < \frac{1}{4}$

1) $\arg < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - i(\alpha) < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -i(\alpha) < -\frac{3}{4}$

$\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2} \quad = i(\alpha) > \frac{3}{4}$

$\alpha > \frac{5}{6} : \sqrt{1 - \left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\right)}$

$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$x = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

$\alpha \in \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right) : \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{3}$

$\alpha \in 0, \frac{1}{2} :$

Logické spojky

$\hat{\wedge} : \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle \rightarrow \langle 0,1 \rangle$

$\dot{\vee} : \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle \rightarrow \langle 0,1 \rangle$

1) komutativita : $\alpha \hat{\wedge} \beta = \beta \hat{\wedge} \alpha$

2) asociativita : $\alpha \hat{\wedge} (\beta \hat{\wedge} \gamma) = (\alpha \hat{\wedge} \beta) \hat{\wedge} \gamma$

3) monotonie : $\forall \alpha, \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \hat{\wedge} \beta \leq \alpha \hat{\wedge} \gamma$

4) $\alpha \hat{\wedge} 1 = \alpha$ $\qquad \alpha \dot{\vee} 0 = \alpha$

$\alpha \dot{\vee} 1 = 1$

$\alpha \hat{\wedge} 0 = 0$

$\alpha \hat{\wedge} 0 \overset{(3)}{<} 1 \hat{\wedge} 0 \overset{(1)}{=} 0 \hat{\wedge} 1 \overset{(4)}{=} 0$

Typy :

$\alpha \hat{\wedge}_S \beta = \min(\alpha, \beta)$ $\qquad \alpha \overset{S}{\vee} \beta = \max(\alpha, \beta)$ „standardní"

$\alpha \hat{\wedge}_P \beta = \alpha \cdot \beta$ $\qquad \alpha \overset{P}{\vee} \beta = \alpha + \beta - \alpha \cdot \beta$ „součinová" ~~[illegible]~~

$\alpha \hat{\wedge}_L \beta = \alpha + \beta - 1$ $\qquad \alpha \overset{L}{\dot{\vee}} \beta = \alpha + \beta$ „Lukaševičovo"

$= \min(1, \alpha + \beta)$ (ať nepřeteklo)

$\alpha \hat{\wedge}_D \beta = 0$ (až na výjimku z vlastnosti (4)) $\quad \alpha \overset{D}{\vee} \beta = 1$ až na výjimku (4)

$\alpha \in (0,1) : \beta > \gamma \Rightarrow \alpha \hat{\dot{\vee}} \beta > \alpha \hat{\dot{\vee}} \gamma$ (P)

spojité
- archimédovské
  - striktní (P) $\alpha \in (0,1) : \beta > \gamma \Rightarrow \alpha \hat{\dot{\vee}} \beta > \alpha \hat{\dot{\vee}} \gamma$
  - nilpotentní (není striktní) (L)
- nearchimédovské (S) $\exists \alpha \in (0,1) : \alpha \hat{\wedge} \alpha = \alpha$

nespojité (D) (drastická)

$\alpha \overset{\vee}{\underset{\cdot}{\wedge}} \beta = i^{-1}\left(i(\alpha) \overset{PL}{\underset{PL}{\overset{\vee}{\wedge}}} i(\beta)\right)$; i – rostoucí bijekce

$\neg\alpha \dot\wedge \neg\beta = \neg(\alpha \dot\vee \beta)$ – De Morganovy vzorce

$\boxed{Pr}$

$\neg(\neg\alpha \dot\wedge \neg\beta) = \alpha \dot\vee \beta \quad / \cdot\neg$

? $\alpha \overset{S}{\vee} \beta \overset{?}{=} {}_S\neg({}_S\neg\alpha \hat{S} {}_S\neg\beta)$

1) $max(\alpha,\beta) = 1 - min(1-\alpha, 1-\beta) = \begin{cases} \alpha<\beta: 1-(1-\beta)=\beta \\ \alpha>\beta: 1-(1-\alpha)=\alpha \end{cases}$

$= \left.\begin{cases} \alpha>\beta: \alpha \\ \alpha<\beta: \beta \end{cases}\right\} max(\alpha,\beta)$

L = P

2) $max(\alpha,\beta) = \neg(min(\neg\alpha,\neg\beta)) \left.\begin{cases} \alpha>\beta & \neg\neg\alpha = \alpha \\ \beta>\alpha & \neg\neg\beta=\beta \end{cases}\right\} max(\alpha,\beta)$

1) $\alpha > \beta \Rightarrow \neg\alpha \leq \neg\beta$

2) $\neg\neg\alpha = \alpha$

$\boxed{Pr}$ $\alpha \overset{P}{\vee} \beta \overset{?}{=} {}_S\neg({}_S\neg\alpha \hat{P} {}_S\neg\beta) = 1 - {}_S\neg\alpha \cdot {}_S\neg\beta$

$\alpha + \beta - \alpha\cdot\beta \overset{?}{=} 1 - ((1-\alpha)\cdot(1-\beta))$

$= 1 - (1 - \alpha - \beta + \alpha\beta)$

$\alpha + \beta - \alpha\cdot\beta = \alpha + \beta - \alpha\cdot\beta$

$\boxed{Pr}$ $\alpha \overset{E}{\vee} \beta = \dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha\cdot\beta}$ (Je to konjunkce nebo disjunkce?)

0) a) $\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}$ je vždy větší nebo rovno 0

b) $\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta} \leq 1 \iff \alpha+\beta \leq 1+\alpha\beta$

$\alpha - \alpha\beta \leq 1-\beta$ platí!

$\alpha(1-\beta) \leq 1-\beta$

$\alpha \leq 1$

(e) $\mu_{A\cup B}$ - jako součet, ale vše, co je větší než 1 je uříznuto

FUZZY RELACE

$R\in\mathcal{F}(X\times Y)$ $\quad\mu_R(x,y)$

$S\in\mathcal{F}(Y\times Z)$

$(x,z)\in R\circ S \iff \exists y : (x,y)\in R \wedge (y,z)\in R$

$$\mu_{R\circ S}(x,z) = \sup_y \mu_R(x,y)\wedge\mu_S(y,z)$$

$R\in\mathcal{F}(X\times X)$

$(x,x)\in R$ $\quad\mu_R(x,x)=1$ $\quad$ reflex. $\quad R\supseteq\delta$

$\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$ $\quad$ symetrie $\quad R^{-1}=R$

$\forall y: \mu_R(x,y)\wedge\mu_R(y,z)\le\mu_R(x,z)$ $\quad$ tranzitivita $\quad R\circ R\subseteq R$

$\mu_R(x,y)\wedge\mu_R(y,x)=0$ pro $x\neq y$ $\quad$ antisymetrie $\quad R\cap R^{-1}\subseteq\delta$

PŘ

$R,S\in\mathcal{F}(\{0,1,2\}\times\{0,1,2\})$

R:	0	1	2
0	0,1	0,2	0,3
1	0,4	0,5	0,6
2	0,7	0,8	0,9

S:	0	1	2
0	0,5	0,5	0,5
1	0	0	1
2	1	0	0,7

$R\circ_s S,\ R\circ_p S,\ R\circ_L S,\ R\circ_D S$

$\max(0{,}1\wedge_s 0{,}5;\ 0{,}2\wedge_s 0;\ 0{,}3\wedge_s 1)$

$R\circ_s S\in\mathcal{F}(\{0,1,2\}\times\{0,1,2\})$

$\boxed{R\circ_s S}$

	0	1	2
0	0,3	0,1	0,3
1	0,6	0,4	0,6
2	0,9	0,5	0,8

$\boxed{R \underset{P}{\circ} S}$

	0	1	2
0	0,3	0	0,2
1	0,6	0	0,5
2	0,9	0	0,8

$\boxed{PR}$

$R \in \mathcal{F}(\{0,1,2\} \times R) \quad S \in \mathcal{F}(R \times R)$

R $x \backslash y$	0	1	2
0	0,1	0,2	0,3
1	0,4	0,5	0,6
2	0,7	0,8	0,9

0, jinde

$$\mu_S(y,z) = \begin{cases} \frac{y+z}{2} & y \in \langle 1,2 \rangle \\ & z \in \langle -1,0 \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$R \underset{P}{\circ} S = ?$

$$\mu_{R \underset{P}{\circ} S}(x,z) = \max_{y=0,1,2} \left(\mu_R(x,y) \cdot \mu_S(y,z) \right), \quad x = \{0,1,2\}$$

$$= \begin{cases} = \max\left(\begin{matrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 0,8 \end{matrix} \cdot \frac{1+z}{2}, \begin{matrix} 0,3 \\ 0,6 \\ 0,9 \end{matrix} \cdot \frac{2+z}{2} \right) \\ 0 \quad z \notin \langle -1,0 \rangle \end{cases}$$

$x = 0: \quad 0,3 \cdot \frac{2+z}{2}$

$x = 1: \quad 0,6 \cdot \frac{2+z}{2}$

$x = 2: \quad 0,9 \cdot \frac{2+z}{2}$

Pr	1	2	3	4
1	1	0,5	0,2	x
2	0,5	1	0,4	0,2
3	0,2	0,4	1	y
4	x	0,2	y	1

konst

$0{,}2 \wedge 0{,}4 = \mu(1,3) \wedge \mu(3,2) \leq \mu(1,2) = 0{,}5$ ←

$x \wedge 0{,}2 = \mu(1,4) \wedge \mu(4,2) \leq \mu(1,2) = 0{,}5$ ← neplatí pro $\hat{S}$

$0{,}5 \wedge 0{,}4 = \mu(1,2) \wedge \mu(2,3) \leq \mu(1,3) = 0{,}2$

$x \wedge y = (1,4)\ (4,3) \leq \mu(1,3) = 0{,}2$

$0{,}5 \wedge 0{,}2 = (1,2)\ (2,4) \leq \mu(1,4) = x$

$0{,}2 \wedge y = (1,3)\ (3,4) \leq \mu(1,4) = x$

$0{,}5 \wedge 0{,}2 = (2,1)\ (1,3) \leq \mu(2,3) = 0{,}4$ ←

$0{,}2 \wedge y = (2,4)\ (4,3) \leq \mu(2,3) = 0{,}4$

$0{,}5 \wedge x = (2,1)\ (1,4) \leq \mu(2,4) = 0{,}2$

$0{,}4 \wedge y = (2,3)\ (3,4) \leq \mu(2,4) = 0{,}2$

$0{,}2 \wedge x = (3,1)\ (1,4) \leq \mu(3,4) = y$

$0{,}4 \wedge 0{,}2 = (3,2)\ (2,4) \leq \mu(3,4) = y$

Doplňte tabulku, aby to byla ekvivalence.

6,5b.

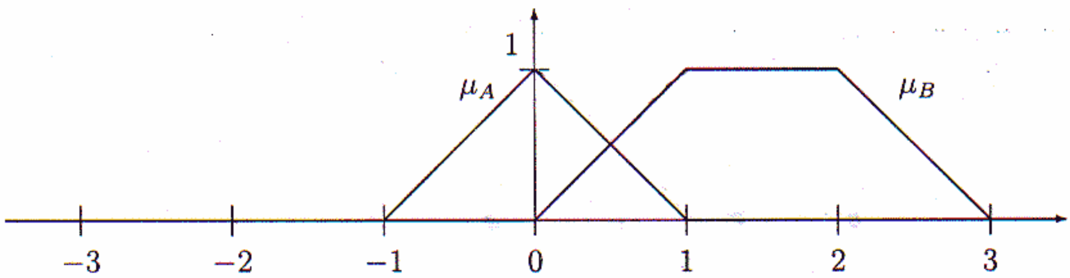
B Jméno: KORTUS

0 1. V osudí jsou 2 druhy kostek, na prvních jsou čísla $1, \dots, 6$, na druhých pouze $1, 3, 5$, u obou druhů jsou všechny možné výsledky stejně pravděpodobné. Vytáhli jsme 20 kostek a jednou jimi hodili; četnost výsledků udává tabulka. Odhadněte, kolik z těchto kostek bylo prvního druhu.

hodnota	1	2	3	4	5	6
četnost	3	4	4	4	2	3

3 2. Náhodná veličina X má diskrétní rovnoměrné rozdělení s hodnotami $\{-1, 0, 1, 2\}$. Popište a znázorněte rozdělení náhodné veličiny
(a) $X - 1/2$, (b) $2X$, (c) $|X|$.

1,5 3. Jsou dány fuzzy intervaly A, B s po částech lineárními funkcemi příslušnosti dle obrázku. Určete a znázorněte
(a) $A \overset{P}{\cup} B$, (b) $\overline{A}^s \underset{P}{\cap} \overline{B}^s$, (c) $A + B$.



2 4. Najděte všechny binární fuzzy relace $R \subseteq \{1, 2, 3\}^2$, které jsou součinové ekvivalence (podobnosti) a splňují $R(1, 2) = 1/4$.

1

1	$\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$	3
2	$\frac{1}{n}$	4
3	$\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$	4
4	$\frac{1}{n}$	4
5	$\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$	2
6	$\frac{1}{n}$	3
		$\Sigma = 20$

Předpoklad

$$3 \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + 3 \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$\frac{3}{n} + \frac{3}{m} + \frac{3}{n} = 1$$

$$\frac{6}{n} + \frac{3}{m} = 1$$

$$m + n = 20$$
$$n = 20 - m$$

$$6m + 3n = m \cdot n$$
$$6m + 60 - 3m = m(20 - m)$$
$$m^2 - 20m + 6m - 3m + 60 = 0$$
$$m^2 - 17m + 60 = 0$$
$$m_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} 14 \\ 5 \end{cases}$$

Diskuze výsledku:
Zadané výsledky odpovídají spíše $m = 5$

Ob

~~klasických kostek bude asi 15~~
podivných bude 5
kdyby bylo 14 kostek "tříbarevných", dosahovali by {1,3,5} nadprůměrných výsledků (četností) - opak je pravdou

(2)

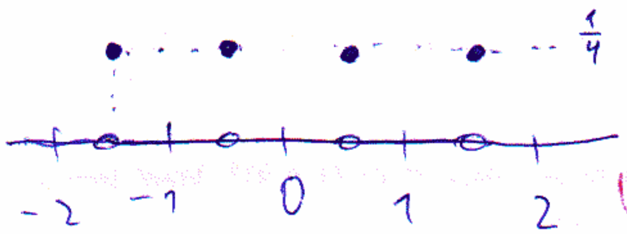
a) $P[X=-1] = P[X=0] = P[X=1] = P[X=2] = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$

$P[X=-1] = P[X-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}] = \frac{1}{4}$

$P[X=0] = P[X-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}] = \frac{1}{4}$

$\vdots$

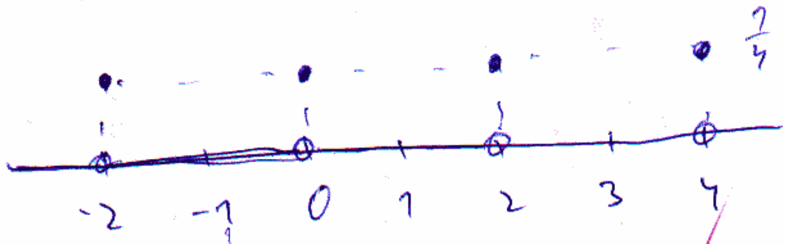


b) $P[X=-1] = P[2X=-2]$

$P[X=0] = P[2X=0]$

$P[X=1] = P[2X=2]$

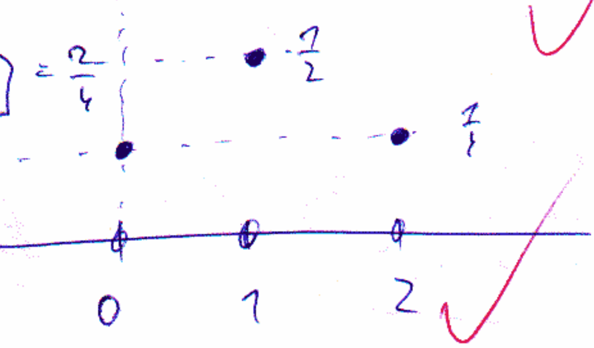
$P[X=2] = P[2X=4]$



c) $P[|X|=1] = P[X=1] + P[X=-1] = \frac{2}{4}$

$P[|X|=2] = P[X=2] = \frac{1}{4}$

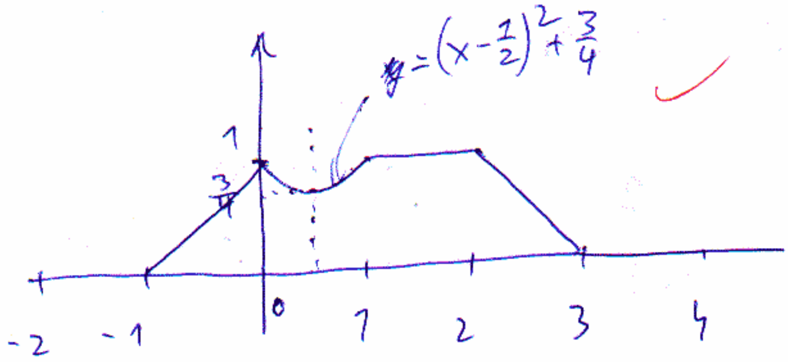
$P[|X|=0] = P[X=0] = \frac{1}{4}$



(3) a)

3P

③ a)



$a+b-a\cdot b$ LIST2 KORTUS

$(1+x)(1-x)=1-x^2$

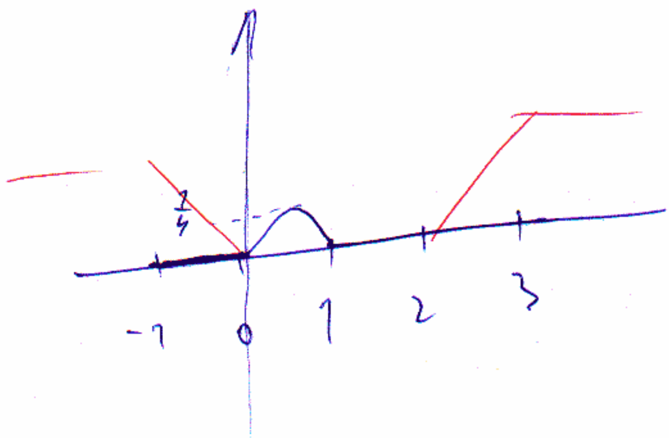
$1-a\cdot b=1-1+x^2$

$$a+b-a\cdot b = 1-a\cdot b = 1-(1-x)x =$$
$$= x^2-x+1 = x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 =$$
$$= (x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

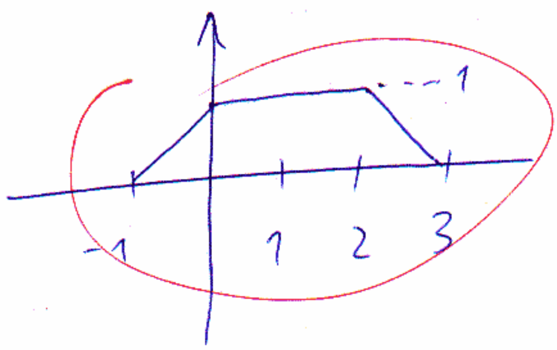
b)

sai komplem => $\alpha \cdot \beta$

$x\cdot(-x+1)=$
$-x^2+x$



c) A + B



1,5

④

tabulka μ_R:

	1	2	3
1	1	1/4	x
2	1/4	1	y
3	x	y	1

$x = x \wedge_p 1 = (1,3) \wedge_p (3,3) \leq (1,3)$

$\cancel{0{,}5}\ 0{,}25 \wedge_p y = (1,2) \wedge_p (2,3) \leq (1,3)$

$x^2 = x \wedge_p x = (3,1) \wedge_p (1,3) \leq (3,3)$

symetrie podle diagonály
jedničky na diagonále
neboť $(x,x) \in R$

2

Ústní zkouška

Čebyševova nerovnost, význam, použití

směrodatná odchylka

$$P\left[|X - EX| \leq \varepsilon\right] \leq \frac{\mathrm{var}\,X}{\varepsilon^2} = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

X - náhodná veličina
EX - stř. hodnota náhodné veličiny $EX = \sum_{(i)} p_i \cdot x_i$
var X = DX - rozptyl náh. veličiny X $DX = EX^2 - (EX)^2$
použití: známe rozptyl ⇒ lze říci, s jakou pravděpodobností nepadne náh. pokus "dále" než o ε
→ jedná se pouze o hrubý odhad