

## Kapitola 4

# Aritmetické operace a obvody pro jejich realizaci

### 4.1 Polyadické číselné soustavy a jejich vlastnosti

Polyadické soustavy jsou určeny přirozeným číslem  $z$ , kterému se říká *základ* nebo *báze* dané soustavy a které splňuje podmínku  $z \geq 2$ .

Celá čísla  $a_i$ , která splňují podmínku  $0 \leq a_i < z$ , kde  $z$  je  $z$ -adická číslice.

$$a_{min} = 0, \quad a_{max} = z - 1 \quad (4.1)$$

Obrazem čísla  $A = \sum_{i=-n}^n a_i \cdot z_i$  je zápis  $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$ , kde čárka mezi  $a_0$  a  $a_{-1}$  vyjadřuje řádovou ( $z$ -adickou) čárku.

Číslice před řádovou čárkou reprezentují celou část a číslice za řádovou čárkou zlomkovou část čísla  $A$ .

#### Vlastnosti polyadických soustav

V  $z$ -adické soustavě lze zobrazit čísla  $A_{min} = 0$  až  $A_{max} = z^{n+1} - z^{-m}$

### 4.2 Kódy pro zobrazení záporných čísel a základní operace v těchto kódech - sčítání, odčítání, aritmetické posuvy

#### 4.2.1 Doplnkový kód

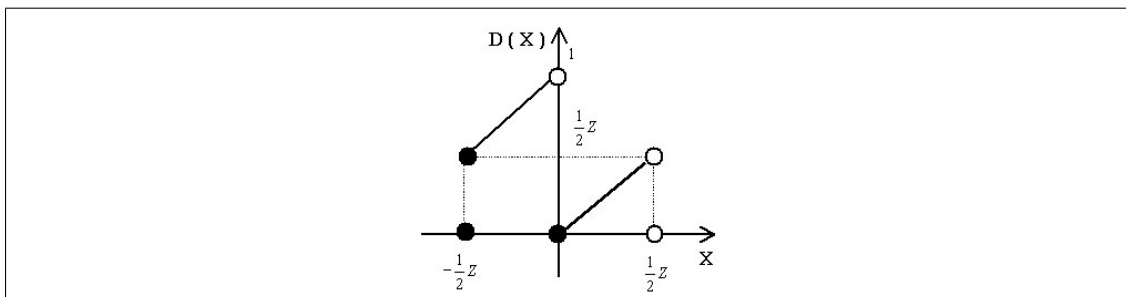
Obrazem čísla  $A$  v doplňkovém kódu je:  $\mathcal{D}(A) = \begin{cases} A & \text{pro } A \geq 0 \\ Z + A & \text{pro } A < 0, \text{ tj. } Z - |A| \end{cases}$

$Z$  je modul řádové mřížky:  $Z = z^{n+1}$ .

Obrazem záporného čísla  $A$  v doplňkovém kódu je tedy doplněk jeho absolutní hodnoty  $|A|$  do modulu  $Z$  řádové mřížky.

Dvojnásobnost obrazů čísel musíme vyloučit tím, že omezíme rozsah zobrazitelných čísel na polovinu, tj. absolutní hodnota musí být menší než  $\frac{1}{2}Z \Rightarrow -\frac{1}{2}Z \leq A < \frac{1}{2}Z$  - viz. obrázek 4.1.

Znaménko je určeno první číslicí  $\begin{cases} \text{pro dvojkový kód} & + \sim 0 & - \sim 1 \\ \text{pro desítkový kód} & + \sim 0 \div 4 & - \sim 5 \div 9 \end{cases}$



Obrázek 4.1: doplňkový kód

### Sčítání

Při sčítání se sečtou obrazy a ignoruje se přenos. K přeplnění dojde, když se sčítají čísla se stejným znaménkem a výsledek má opačné znaménko.

$$\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A) \dot{+} \mathcal{D}(B) \quad (4.2)$$

### Odčítání

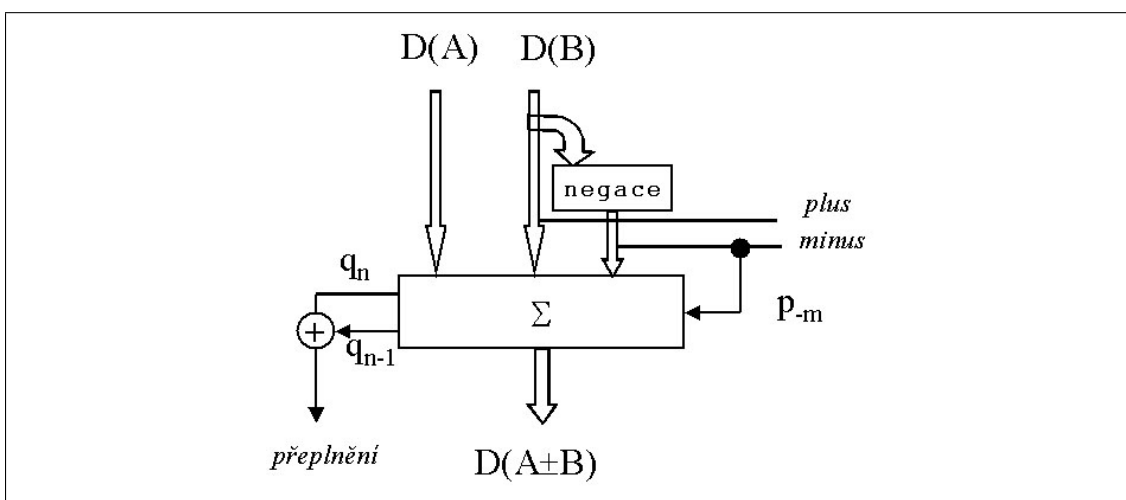
Odčítání se převádí na přičítání opačného čísla, tj.  $A - B = A + (-B)$ .

Nechť  $\tilde{a}$  je doplněk  $z$ -adické číslice  $a$  do  $z - 1$ , tj.  $\tilde{a} = z - 1 - a$ , kde  $\tilde{a}$  je inverze  $z$ -adické číslice. Pak

$$\mathcal{D}(-A) = \widetilde{\mathcal{D}(A)} \dot{+} \varepsilon \quad (4.3)$$

obraz opačného čísla v doplňkovém kódu získáme tak, že nahradíme všechny číslice jejich inverzemi a přičteme jednotku řádové mřížky ( $\varepsilon = z^{-m}$  tzv. *horkou jendičku*). Jednotka řádové mřížky je Detekce přeplnění je stejná jako u sčítání.

Na obrázku 4.2 je sčítačka-odčítačka pro doplňkový kód.



Obrázek 4.2: sčítačka-odčítačka v doplňkovém kódu

### 4.2.2 Přímý kód

U přímého kódu je řádová mřížka rozdělena na dvě podmřížky. Do jedné se zapisuje znaménko a do druhé absolutní hodnota.

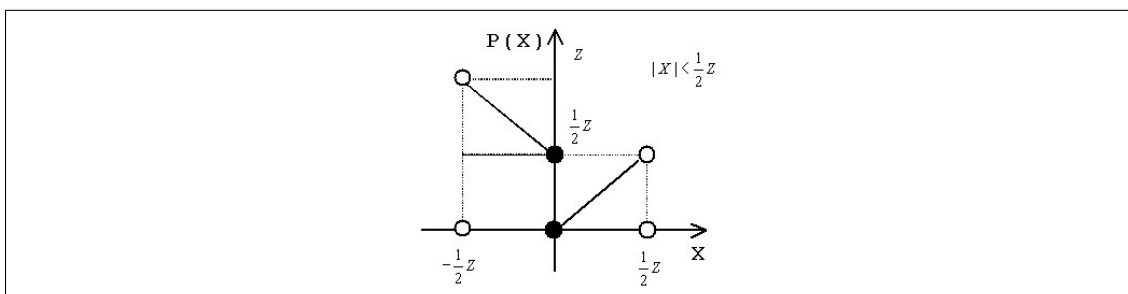
Znaménkový bit  $\begin{cases} + \sim 0 \\ - \sim 1 \end{cases}$

$\pm$  | absolutní hodnota

S každou řádovou podmřížkou se pracuje samostatně. Nejvyšším řádem podmřížky pro absolutní hodnotu je  $n - 1$ .

Absolutní hodnota  $|A|$  zobrazitelných čísel  $A$  musí splňovat podmínku (viz. obrázek 4.3):

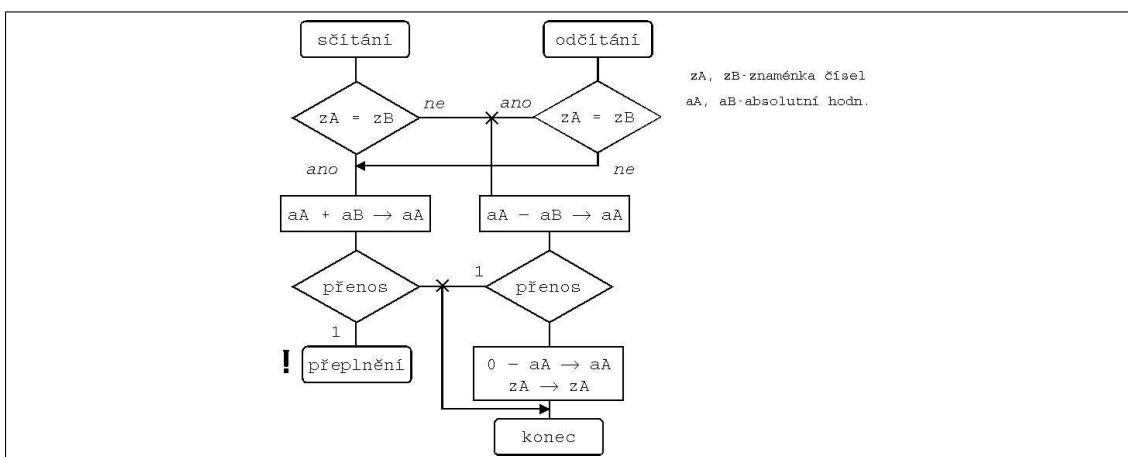
$$|A| < Z' = \frac{1}{z}Z \quad (4.4)$$



Obrázek 4.3: přímý kód

Obrazem čísla  $A$  v přímém kódu je:  $\mathcal{P}(A) = \begin{cases} A & \text{pro } A \geq 0 \\ \frac{1}{z}Z + A & \text{pro } A \leq 0 \end{cases}$

Na obrázku 4.4 je znázorněno sčítání a odčítání v přímém kódu. K přeplnění dojde, pokud je přenos do nejvyššího řádu.

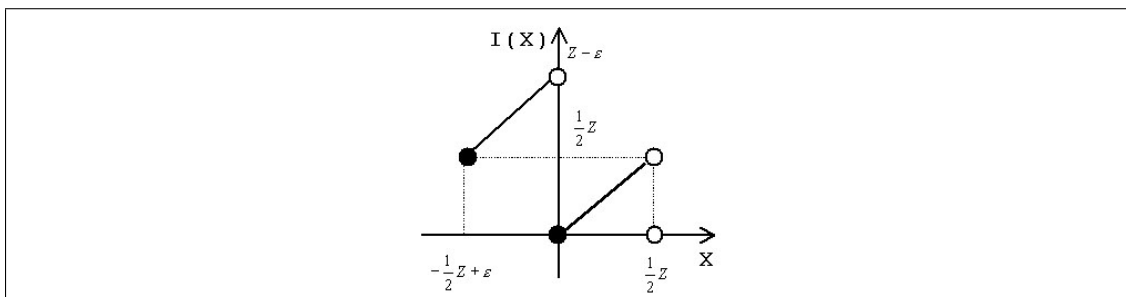


Obrázek 4.4: sčítání-odčítání v přímém kódu

### 4.2.3 Inverzní kód

Obrazem čísla  $A$  v inverzním kódu je:  $\mathcal{I}(A) = \begin{cases} A & \text{pro } A > 0 \\ |A| = Z - \varepsilon + A & \text{pro } A \leq 0 \end{cases}$

Nula má dva obrazy -  $0 \sim$  kladná nula a  $Z - \varepsilon \sim$  záporná nula - viz. obrázek 4.5.



Obrázek 4.5: inverzní kód

Zobrazitelná čísla  $A$  musí splňovat podmínku:

$$-\frac{1}{2}Z < A < \frac{1}{2}Z \quad (4.5)$$

Obraz čísla, který má kladný charakter, má v nejvyšším řádu číslice menší než  $\frac{z}{2}$ , tj.  $\{0\}$  pro dvojkovou soustavu a  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  pro desítkovou soustavu.

Obraz čísla, který má záporný charakter, má v nejvyšším řádu číslice  $\frac{z}{2}$  nebo větší, tj.  $\{1\}$  pro dvojkovou soustavu a  $\{5, 6, 7, 8, 9\}$  pro desítkovou soustavu.

Detekce přeplnění je stejná jako u doplňkového kódu.

### 4.2.4 Posuvy

*Posuv* - operace při níž se posouvají číslice vůči řádové mřížce.

{	Posuv	logický	na uvolněná místa se vkládají nuly	
		cyklický	vypadávající číslice se vkládají na uvolněná místa	
		aritmetický	doleva	$A \cdot 2^k$
			doprava	$\frac{A}{2^k}$
		na uvolněná místa se u tohoto posuvu dávají takové bity, aby výsledek odpovídal příslušnému násobení nebo dělení.		

#### Aritmetický posuv

Pro nezáporná čísla, není-li použit kód pro zobrazení záporných čísel, se na uvolněná místa vkládají nuly. Zabýváme se zde přeplněním (přeplnění - vypadne nenulový bit).

#### Aritmetický posuv v přímém kódu

Znaménkový bit se nemění a na absolutní hodnotu se aplikuje aritmetický posuv pro nezáporná čísla.

#### Aritmetický posuv v doplňkovém kódu

Pro nezáporná čísla se dávají na uvolněná místa 0.

Přeplnění/ztráta přesnosti - vypadne nenulové číslo nebo se změní znaménko.

Posuv záporných čísel v doplňkovém kódu:

**Doprava** - vkládají se číslice  $z - 1$ . Vypadne-li nenulová  $\Rightarrow$  ztráta přesnosti.

**Doleva** - vkládá se nula. Nesmí vypadnout jiná číslice než  $z - 1$ .

### Aritmetický posuv ve dvojkové soustavě

Aritmetický posuv pro záporná i nezáporná čísla:

**Doprava** - obraz se posune a na všechna uvolněná místa se uloží bit, který byl v nejvyšším řádu.

**Doleva** - vkládá se nula. Pokud máme posunout o  $k$  míst a v  $k + 1$  nejvyšších řádech nejsou stejné bity  $\Rightarrow$  přeplnění.

## 4.3 Dvojkové sčítačky a odčítačky (také sčítačka s predikcí přenosů)

Sčítání v  $z$ -adické soustavě:

1. položíme  $p_{-m} = 0$  (přenos v nejnižším řádu)

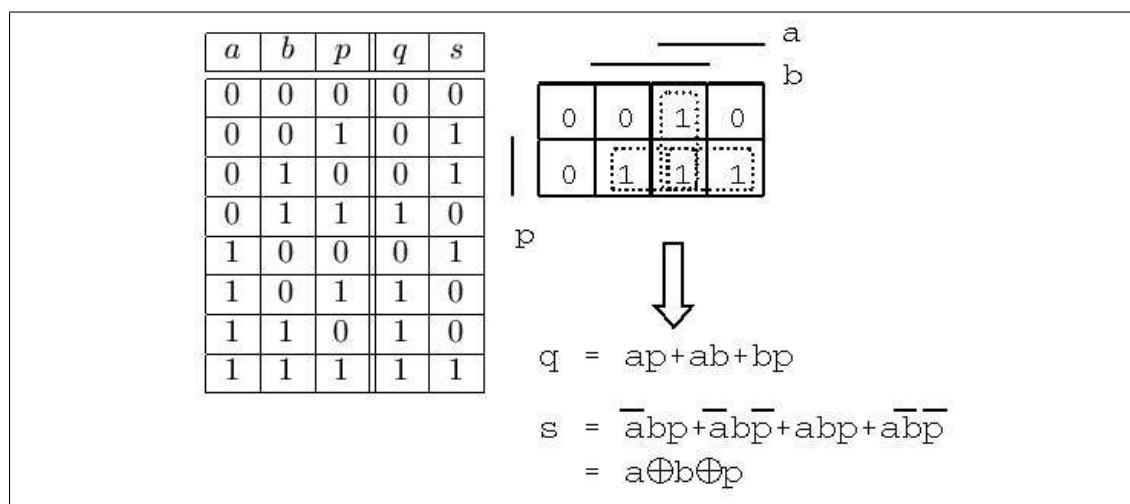
2. pro  $i = -m, \dots, n$  postupně určujeme:

$$s_i = \begin{cases} a_i + b_i + p_i & \text{je-li } a_i + b_i + p_i < z \\ a_i + b_i + p_i - z & \text{je-li } a_i + b_i + p_i \geq z \end{cases}$$

$$q_i = p_{i+1} = \begin{cases} 0 & \text{je-li } a_i + b_i + p_i < z \\ 1 & \text{je-li } a_i + b_i + p_i \geq z \end{cases}$$

Je-li  $q_n = 1 \Rightarrow$  přeplnění.

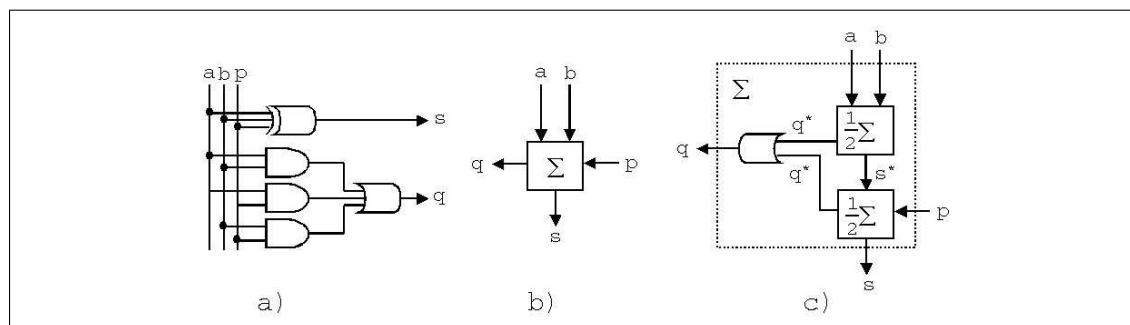
Na obrázku 4.6 je pravdivostní tabulka sčítačky, minimalizační mapa a výsledné výrazy pro  $q$  a  $s$ .



Obrázek 4.6: mapa sčítačky

Jeden z možných obvodů sčítačky je na obrázku 4.7 a).<sup>1</sup> Na obrázku 4.7 b) je znázorněna schématická značka sčítačky a konečně obrázek 4.7 c) ukazuje sčítačku sestavenou ze dvou půlsčítaček. Na obrázku 4.8 je pravdivostní tabulka půlsčítačky.

<sup>1</sup>Nezatěžoval jsem se převádět všechna hradla na stejný typ. Jako ilustrace by to mělo stačit



Obrázek 4.7: a) obvod sčítačky, b) označení sčítačky, c) sčítačka ze dvou polo-sčítaček

$a$	$b$	$q^*$	$s^*$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$s^* = \bar{a}b + a\bar{b}$$

$$q^* = ab$$

Obrázek 4.8: pravdivostní tabulka půlsčítačky

Paralelní sčítačka, která je zobrazená na obrázku 4.9 má značné zpoždění. Zpoždění sčítačky úzce souvisí s přenosy. Jsou-li přenosy vyhodnoceny, vyhodnotí se také rychle řádový součet. Pozorování:

- je-li  $a_i = b_i = 0 \Rightarrow q_i = 0$  bez ohledu na  $p_i$ . Přenos v daném řádu *zaniká*.
- je-li  $a_i = b_i = 1 \Rightarrow q_i = 1$  bez ohledu na  $p_i$ . Přenos v daném řádu *vzniká*.
- je-li  $a_i \neq b_i \Rightarrow q_i = p_i$ . Přenos daným řádem *prochází*.

$$\text{Nechť } \begin{cases} G_i = a_i \cdot b_i \\ P_i = a_i \oplus b_i \end{cases}$$

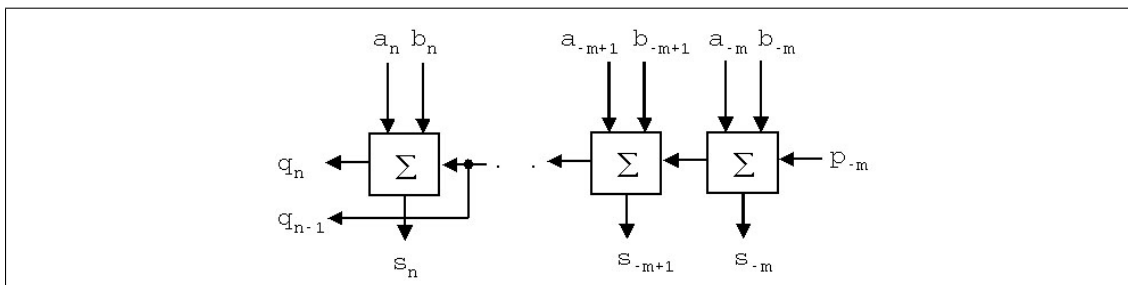
$$\text{Je-li } \begin{cases} G_i = 1 \Rightarrow \text{přenos se v daném řádu generuje} \\ P_i = 1 \Rightarrow \text{přenos daným řádem prochází} \end{cases}$$

Jsou-li  $i$  a  $j > i$  dva řády a platí-li  $P_i \cdot P_{i+1} \dots P_j = 1 \Rightarrow$  přenos prochází všemi řády  $i$  až  $j$ . Jako přenos nepoužijeme  $q_j$ , ale  $q_j + (P_i \cdot P_{i+1} \dots P_j) \cdot p_i$ . Pokud by nyní měl přenos procházet přes řády  $i$  až  $j$ , projde pouze přes hradlo realizující součin  $(P_i \cdot P_{i+1} \dots P_j = 1) \cdot p_i$ . Toto hradlo je výhybkou kolem sekce úplných sčítaček pro řády  $i$  až  $j$  - viz. obrázek 4.10.

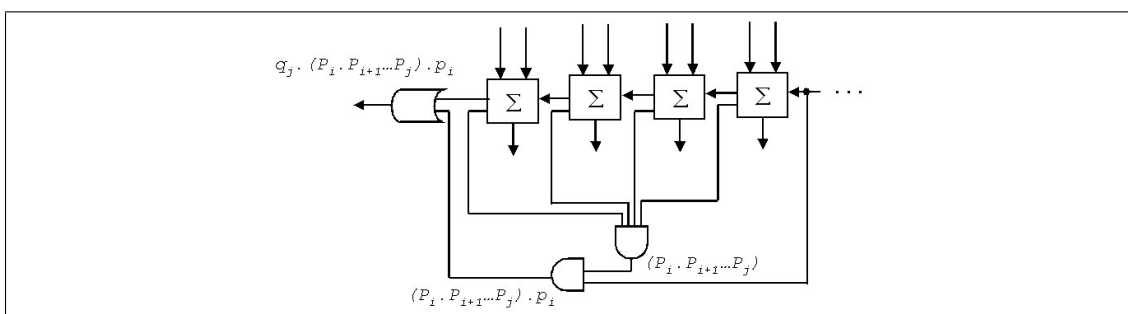
Zpoždění můžeme dále snižovat:

$$p_{i+1} = G_i + P_i \cdot p_i \Rightarrow p_{i+j} = G_{i+j-1} + P_{i+j-1} \cdot G_{i+j-2} + P_{i+j-1} \cdot P_{i+j-2} \cdot G_{i+j-3} + P_{i+j-1} \dots P_i \cdot p_i \quad (4.6)$$

Přenosy se tedy mohou vytvářet ve zvláštním obvodu a mohou se přivádět přímo na příslušné vstupy úplných sčítaček  $\Rightarrow$  sčítačka s predikcí přenosu.



Obrázek 4.9: paralelní sčítačka



Obrázek 4.10: sčítačka s výhybkou

### Odčítání

1. položíme  $v_{-m} = 0$  (přenos v nejnižším řádu)

2. pro  $i = -m, \dots, n$  postupně určíme:

$$r_i = \begin{cases} a_i - b_i - v_i & \text{je-li } a_i - b_i - p_i \geq z \\ a_i - b_i - p_i + z & \text{je-li } a_i - b_i - v_i < z \end{cases}$$

$$w_i = v_{i+1} = \begin{cases} 0 & \text{je-li } a_i - b_i - v_i \geq z \\ 1 & \text{je-li } a_i - b_i - v_i < z \end{cases}$$

$a$	$b$	$v$	$w$	$r$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

$$r = a \oplus b \oplus v$$

$$w = \bar{a} \cdot b + \bar{a} \cdot v + b \cdot v$$

Obrázek 4.11: pravdivostní tabulka odčítačky

Samostatná odčítačka se nevytváří. Vytváří se sčítačka-odčítačka. Tyto obvody realizují sčítání nebo odčítání v závislosti na řídicí proměnné:

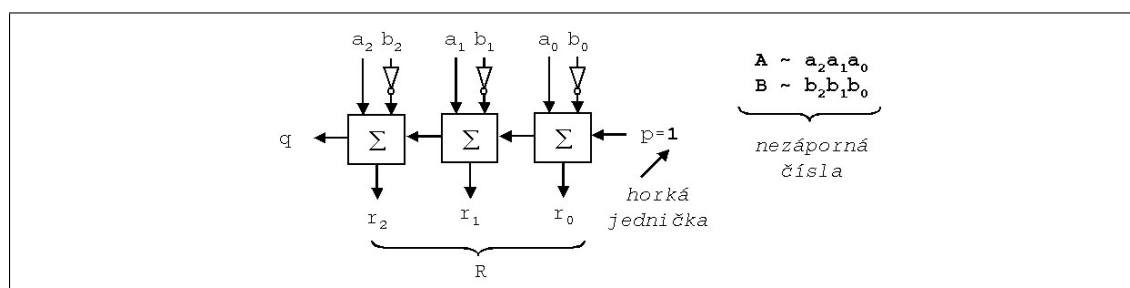
1.  $p_{-m} = 0$

2. na výstupu sčítačky-odčítačky bude  $Y = \begin{cases} S = A + B - Z \cdot q_n & \text{je-li plus} = 1 \\ R = A - B - Z \cdot q_n & \text{je-li plus} = 0 \end{cases}$ , kde  $q_n$  je přenos z nejvyššího řádu.

### Odčítání nezáporných čísel

Při odčítání nezáporných čísel přivedeme do  $p_{-m}$  horkou jedničku a bity druhého čísla na vstupech do sčítaček invertujeme - viz. obrázek 4.12. Pokud bude  $q = 0 \Rightarrow$  výsledek bude záporný a musíme provést odečtení výsledku od nuly, tj.  $0 - \text{výsledek}$ .

$$A - B = A + \bar{B} + 1 - Z \quad (4.7)$$



Obrázek 4.12: odčítání nezáporných čísel

## 4.4 Sčítačka v kódu BCD

$$s = a + b + p - 10 \cdot q$$

Nechť  $y = a^* + b^* + p$ , kde \* označuje obraz číslice v kódu BCD.

Pak platí:

$$q = 1 \Leftrightarrow y \geq 10$$

$$s^* = y - 10 \cdot q \text{ (korekce součtu v případě, že přenos bude 1)}$$

Na obrázku 4.13 je znázorněna sčítačka v kódu BCD, kde:

$\alpha_j$  bity obrazů  $a^*$

$\beta_j$  bity obrazů  $b^*$

$\sigma_j$  bity obrazů  $s^*$

$\gamma_j$  bit čísla  $y$  v řádu  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$

$h$  přenos z řádu 3

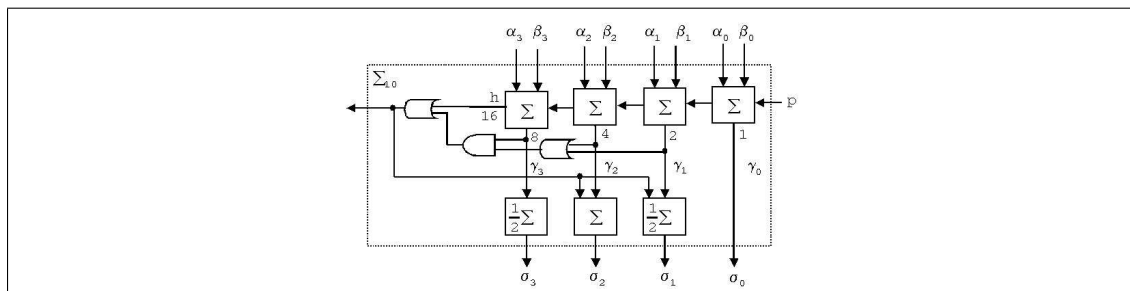
$$\text{Platí: } y = 16 \cdot h + 8 \cdot \gamma_3 + 4 \cdot \gamma_2 + 2 \cdot \gamma_1 + \gamma_0$$

Když  $h = 1 \Rightarrow q = 1$  protože  $y > 10$

...

$$q = h + \gamma_3 \cdot (\gamma_2 + \gamma_1)$$





Obrázek 4.13: sčítačka v kódu BCD

## 4.5 Násobení a dělení nezáporných čísel ve dvojkové soustavě a zapojení příslušných obvodů

### 4.5.1 Násobení

Nechť máme:

$$A = \sum_{i=0}^m a_i \cdot z^i$$

$$B = \sum_{j=0}^n a_j \cdot z^j$$

Pak  $C = A \cdot B = \sum_{j=0}^{m+n+1} c_j \cdot z^j = \sum_{j=0}^n A \cdot b_j \cdot z^j$ . Naším úkolem je pouze určit  $A \cdot b_j$ , protože následné násobení číslem  $z^j$  provedeme pomocí posuvů.

Ve dvojkové soustavě může být  $b_j$  rovno 0 nebo 1 a  $A \cdot b_j$  je tedy rovno také 0 nebo 1  $\Rightarrow$  celé násobení tedy převedeme na sčítání a posuvy.

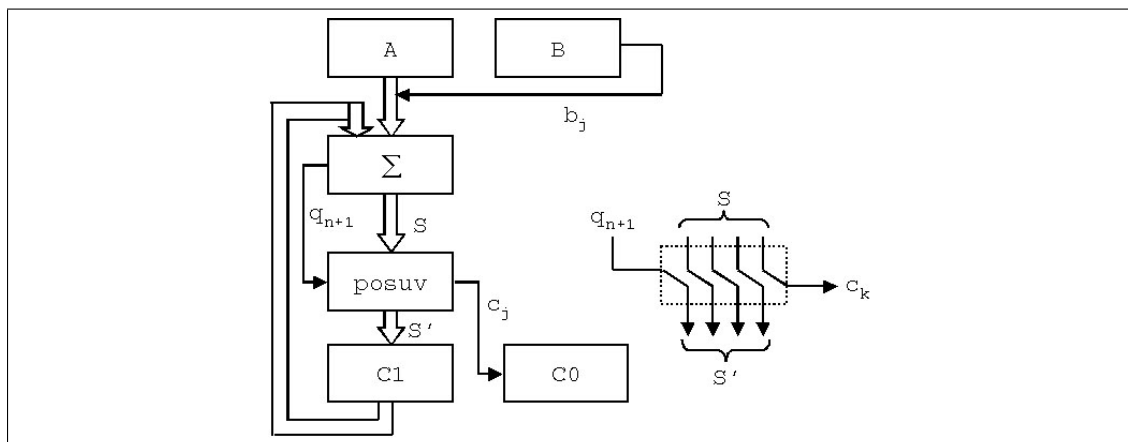
					1	0	1	0	·	1	1	0	1
					1	0	1	0					
				0	0	0	0						
			1	0	1	0							
		1	0	1	0								
	1	0	1	0									
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>					

Má-li být násobení realizováno logickými obvody, je vhodné provádět sčítání postupně a ne najednou. První mezivýsledek je vždy 0. Po prvním přičtení je definitivně určena číslice  $c_0$  po druhém  $c_1$  atd.

					1	0	1	0	·	1	1	0	1
					0	0	0	0					
				1	0	1	0						
			1	0	1	0							
		0	0	0	0								
		0	1	0	1								
	1	0	1	0									
	1	1	0	0									
	1	0	1	0									
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>									

Na obrázku 4.14 je znázorněn obvod násobičky. Na začátku obsahují registry **A** a **B** činitele  $A$  a  $B$  a registr **C1** nulu. Obsah registru **A** se po celou dobu násobení nemění. Obsah **B** se v každém taktu posune o jedno místo vpravo. Na jeho výstupu tedy bude v prvním taktu bit  $b_0$ , ve druhém

$b_1$  atd. Tímto výstupem je hradlována cesta z výstupu registru **A** na vstup sčítačky, na tento vstup se tedy přivádí  $A \cdot b_j$ . Na druhý vstup sčítačky se přivádí výstup registru **C1** - v prvním taktu 0 a v dalších taktech o jedno místo vpravo posunutý výsledek předchozího sčítání - tímto posuvem se od součtu oddělí bit  $c_j$  součinu definitivně určený v daném taktu. Definitivně určený bit  $c_j$  se ukládá do registru **C0**, který se v každém taktu posouvá o jedno místo vpravo. Má-li násobitel  $B$  délku  $l$ , bude násobení trvat  $l$  taktů a do registru **C0** se uloží  $l$  bitů. Jakmile násobení skončí, bude uloženo  $k$  nejvyšších řádů součinu v registru **C1** a nižších  $l$  řádů v **C0**.



Obrázek 4.14: násobička

### 4.5.2 Dělení

$C = \frac{A}{B}$ , před provedením dělení musíme detekovat, zda  $B \neq 0$ . Pro  $z = 2$  musí být logický součet všech bitů dělitele roven 1.

Kromě detekce dělení nulou musíme ještě detekovat přeplnění. K němu dojde v případě, že se po dělení v nejnižším řádu objeví číslice větší nebo rovna základu, tj.  $cislice \geq z$ .

Určování číslic podílu:

1.  $A_{n+1} = A$
2. postupně pro  $i = n, n-1, \dots, -m$  určíme největší celá čísla  $c_i$ , pro která platí  $c_i \cdot B \cdot z^i \leq A_{i+1}$  a položíme  $A_i = A_{i+1} - c_i \cdot B \cdot z^i$ ,  $A_{-m}$  je zbytek.

1 0 1	:	1 1 0	=	0,110
- 1 1 0				
- 1 0		0		→ 0 (výsl. < 0)
+ 1 1 0				
1 0 0		0		→ 1 (výsl. > 0)
- 1 1 0				
1 0 0		0		→ 1 (výsl. > 0)
- 1 1 0				
- 1 0		0		→ 0 (výsl. < 0)
+ 1 1 0				
1 0 0		0		→ návrat přes nulu

Ve dvojkové soustavě se při určování bitu  $c_i$  postupuje následovně:

- odečte se dělitel posunutý o  $i$  míst od dílčího zbytku  $A_{i+1}$ . Bude-li rozdíl záporný, bude  $c_i = 0$  a provede se návrat přes nulu (tj. přičtení toho, co jsem odečet). Bude-li rozdíl nezáporný, bude  $c_i = 1$  a návrat přes nulu se neprovádí.

Dělení bez návratu přes nulu (podrobně):

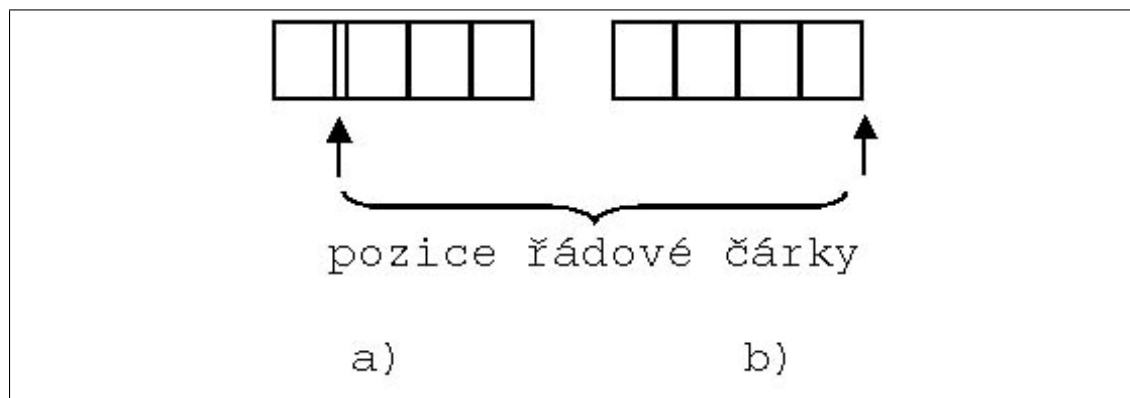
- Postupně se odečítá dělitel. Pokud vyjde záporný výsledek, uloží se do výsledku 0 a přičte se polovina dělitele, tj. dělitel posuneme o jedno místo doprava. Od nezáporného dílčího zbytku se odečítá posunutý dělitel a k zápornému dílčímu zbytku se přičítá posunutý dělitel. Je-li poslední dílčí zbytek záporný, provede se návrat přes nulu. Tj. od nezáporného dílčího zbytku  $A_{i+1} \geq 0$  se odečítá a k zápornému dílčímu zbytku  $A_{i+1} < 0$  se přičítá dělitel  $B$  posunutý o  $i$  míst, tj. číslo  $B \cdot z^i$ . Tím se získá nový dílčí zbytek  $A_i$ . Je-li  $A_i \geq 0$  je bit podílu roven 1, jinak je roven 0.

## 4.6 Pohyblivá řádová čárka - způsoby zobrazení čísel a základní principy provádění operací

Obrazem čísla  $A$  je uspořádaná dvojice  $(m, e)$ . Platí:  $A = m \cdot z^e$ . Pro dvojkovou soustavu tedy máme  $A = m \cdot 2^e$ .

$m$  – mantisa. Pro mantisu se používá první typ řádové mřížky - viz. obrázek 4.15a).

$e$  – exponent. Zde se používá druhý typ řádové mřížky - viz. obrázek 4.15b). Exponent vždy vyjadřuje celé číslo.



Obrázek 4.15: řádová mřížka pro: a) mantisu, b) exponent

### Sčítání/odčítání

1. upravit operandy tak, aby měly stejný exponent
2. sečíst/odečíst mantisy

### Násobení/dělení

1. vynásobit/podělit mantisy
2. sečíst/odečíst exponenty

**Přeplnění** - výsledný exponent je větší než největší možný

**Nenaplnění** - výsledný exponent je menší než nejmenší možný

Číslo má normalizovaný tvar, není-li možné posunout mantisu doleva, tj. v nejvyšším řádu mantisy

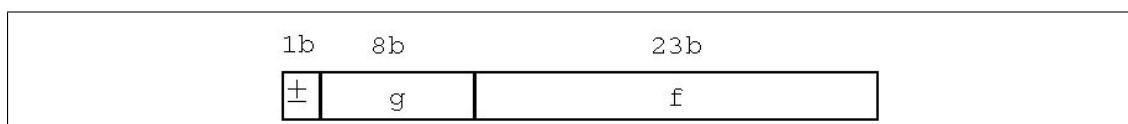
je vždy bit roven 1. Tento bit lze ze zápisu nenulových čísel vypustit  $\Rightarrow$  skrytá jednička.

Na obrázku 4.16 je znázorněna celá pohyblivá řádová mřížka. Platí:

$g = 0$  a  $f = 0 \Rightarrow$  obraz nuly

$g = 255$  a  $f = 0 \Rightarrow \infty$  přeplnění

$g = 255$  a  $f \neq 0 \Rightarrow NaN$  není číslo, např. dělení nulou



Obrázek 4.16: pohyblivá řádová mřížka